МИНИСТЕРСТВО
ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В.М. ПАВЛОВ

ЛИНЕЙНЫЕ УСКОРИТЕЛИ

Часть I

УСКОРЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК
1999

УДК 621.384.64
ББК В381.1

Павлов В.М. Линейные ускорители: Часть I: Ускоряющие системы: Учеб. пособие./Новосиб. ун-т. Новосибирск, 1999, 108 с.

Пособие состоит из двух частей - "Ускоряющие системы" и "Динамика частиц в линейных ускорителях". В первой части описаны типы линейных ускорителей, вопросы возбуждения ускоряющих структур, ускоряющие структуры для линейных ускорителей и методы их исследования.

Предназначено для студентов, аспирантов и научных сотрудников вузов, специализирующихся по физике ускорителей.

Рецензент – канд. физ.-мат. наук. П. В. Логачев

К изданию рекомендовано редакционно-издательским советом НГУ

© Новосибирский государственный университет, 1999

Глава 1

ЛИНЕЙНЫЕ УСКОРИТЕЛИ

Первые соображения о получении искусственно ускоренных частиц появились после опытов Резерфорда в 1919 году (хотя в это время уже существовали высоковольтные рентгеновские трубки). Датой начала ускорителей считается 1931 год, когда Дж. Кокрофт и Э. Уолтон (сотрудники Резерфорда) осуществили первую искусственную ядерную реакцию по расщеплению ядра лития ускоренными протонами с энергией 700 кэВ.

Состав линейного ускорителя

Обычно когда говорят "линейный ускоритель", представляют себе ускоряющую структуру и надетый на нее соленоид. Однако современный линейный, да и любой другой ускоритель есть совокупность различных систем, без которых невозможно ускорение частиц. На рисунке 1.1 схематично представлен далеко не полный состав современного линейного ускорителя, включающий в себя основные перечисленные системы. Для получения заряженных частиц разрабатываются различные источники частиц (электронов, протонов, ионов и др.). Кроме того, для получения некоторых частиц используются так называемые конверсионные системы (например, переводящие $e^- \rightarrow e^+$) или перезарядные устройства (для перезарядки $H^- \rightarrow H^+$). Для ускорения частиц необходимы мощные источники СВЧ, которые включают в себя задающий СВЧ-генератор, высоковольтные модуляторы, умножители мощности, клистронные усилители, волноводные тракты со всевозможными направленными ответвителями и измерителями параметров СВЧ-сигналов для измерения и контроля СВЧ в различных точках ускорителя. Линейные ускорители представляют собой иногда километры вакуумированных и термостабилизированных каналов. Для контроля и поддержания вакуума и температуры в каналах также необходимы соответствующие системы. Работоспособность современных ускорителей сейчас немыслима без целой системы автоматизации на базе быстродействующих вычислительных машин, работающих в реальном времени.

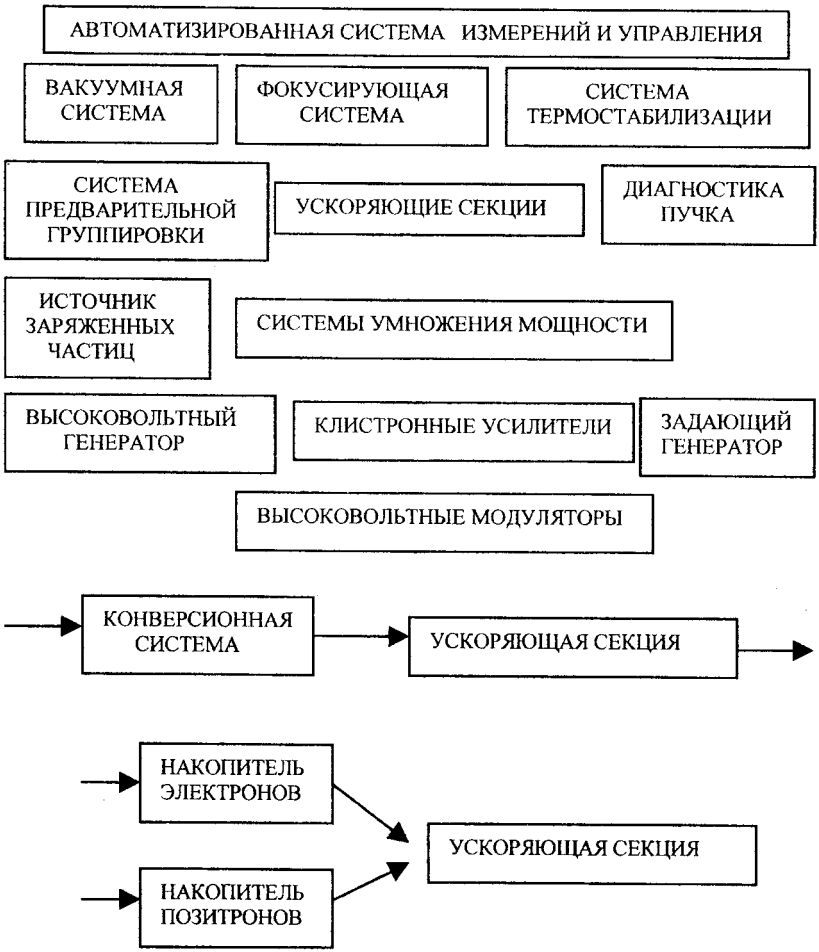


Рис. 1.1. Примерный состав современного линейного ускорителя

Ускорители прямого действия

Ускорителями прямого действия называют ускорители, в которых каким-либо образом получено высокое напряжение и заряженная частица ускоряется в постоянном электрическом поле.

Ускорители трансформаторного типа

Ускорители с высоковольтным трансформатором

Наиболее простой способ получения высокого напряжения - использование высоковольтного повышающего трансформатора. Вторичное напряжение трансформатора или предварительно выпрямляется (в этом случае частицы можно инжектировать непрерывно), или непосредственно подается на ускоряющее устройство (ускорение происходит в импульсном режиме, когда частицы запускаются в ускоряющее устройство в нужной фазе).

До 100÷200 кВ применяется однозазорный вариант, когда электроды расположены на некотором расстоянии друг от друга, сам трансформатор с выпрямителем и фильтром расположен на некотором расстоянии от ускоряющего устройства, а напряжение к нему подается по коаксиальному высоковольтному кабелю. Основное применение таких ускорителей - получение нейтронов бомбардировкой тритиевой мишени 150 кВ дейтонами.

При напряжении ~1 МВ используют трансформаторы с изолированным сердечником (см. рис. 1.2). Причем и ускорительную трубку, и повышающий трансформатор при таких напряжениях выгоднее располагать в одном корпусе (баке), заполненном электроизолирующим газом под давлением.

Особенности трансформатора с изолированным сердечником:

1. Первичная и вторичная обмотки размещены на различных участках магнитопровода. Этим уменьшается вероятность пробоя, хотя потоки рассеяния увеличиваются.
2. Разделение магнитопровода трансформатора на электрически изолированные друг от друга участки. Это также увеличивает электрическую прочность трансформатора, так как участки вторичной обмотки находятся под тем же потенциалом, что и прилегающие участки магнитопровода. Кроме того, нет необходимости использовать специальный делитель напряжения для выравнивания распределения потенциала вдоль ускорительной трубки, так как выпрямление напряжения

   осуществляется по ячейкам, а металлические электроды присоединяются к соответствующим точкам выпрямительной схемы.
3. Высокая, до сотен киловатт, мощность в пучке.

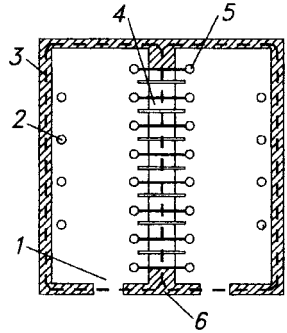


Рис. 1.2. Схема трансформатора с изолированным сердечником:
1 – воздушный зазор;
2 – первичная обмотка;
3 – магнитный поток;
4 – секционированная часть магнитопровода;
5 – вторичная секционированная обмотка;
6 – магнитопровод.

Основные характеристики ускорителей трансформаторного типа с изолированным сердечником:

средняя мощность пучка $P_{ср} \sim$ 10-20 кВт,

стабильность энергии $\Delta W / W$ до 5 %,

полное КПД (отношение мощности пучка к потребляемой мощности электропитания) ~ 25 %.

Ускорители с резонансным трансформатором

В ускорителях с резонансными трансформаторами вторичная обмотка образует резонансный контур. Для этого параллельно вторичной обмотке подключают конденсатор. Такой трансформатор может быть запитан от сети промышленной частоты 50 или 400 Гц, имеет железный сердечник, а частота повторения импульсов ускоренного тока равна частоте питания.

В другом варианте применяется питание от выпрямленного напряжения. Постоянным напряжением заряжается конденсатор, который потом разряжается с помощью коммутирующего устройства на первичную обмотку. При этом резонансная частота контура составляет несколько десятков килогерц, и трансформатор не имеет железного сердечника. В такой схеме резонансные частоты цепей совпадают: $\frac{1}{L_1 \cdot C_1} = \frac{1}{L_2 \cdot C_2}$. Если коэффициент связи между обмотками резонансного трансформатора выбран равным 0.6, то энергия перекачивается из первого контура во второй уже в первом периоде колебаний. На рисунке 1.3 показана конструктивная схема ускорителя ЭЛИТ-1Б, где использован описанный выше резонансный трансформатор как источник напряжения.

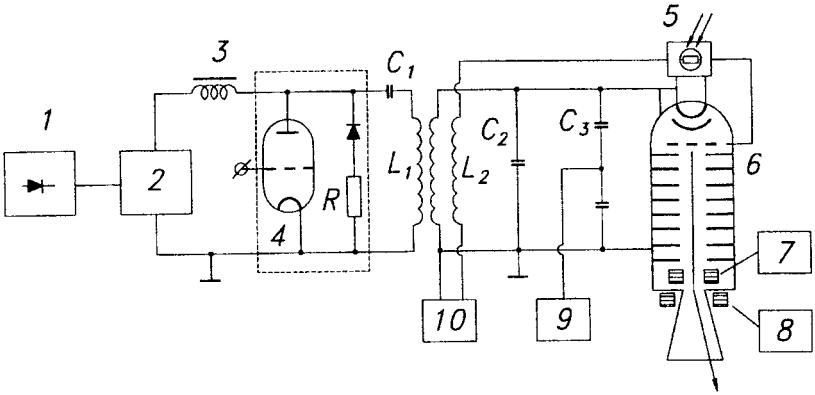


Рис. 1.3. Структурная электрическая схема ускорителя ЭЛИТ-1Б:
1 - регулятор напряжения; 2 - выпрямитель; 3 - дроссель; 4 - коммутатор; 5 - блок управления электронной пушкой; 6 - сетка пушки; 7 - блок питания фокусирующей линзы; 8 - система развертки пучка; 9 - схема измерений и защита от пробоев; 10 - блок питания пушки.

Ускоритель снабжен раструбом на выходе и устройствами для развертки пучка. Основные характеристики ускорителя ЭЛИТ-2Б:

энергия пучка	U – 1,1 МэВ,
энергетический разброс	$\delta U / U$ - 10 %,
средний ток	$I_{ср}$ - 4,5 мА,
импульсный ток	$I_и$ - 50 А,
средняя мощность	$P_{ср}$ - 8 кВт,
длительность импульса	τ - до 2,5 мкс,
частота повторения	F - 100 Гц.

Один из вариантов такой схемы (ЭЛИТ-Л2) используется сейчас как источник мощного электронного пучка для релятивистского клистрона.

В общем для ускорителей с резонансным трансформатором характерны большие средние мощности, большие, до 80 % КПД и 15-20 %-ный энергетический разброс.

Каскадные ускорители

Трансформатор с разделенным магнитопроводом уже является каскадным ускорителем с индуктивной связью. Однако собственно каскадными ускорителями называют ускорители с емкостной связью. Структурная схема ускорителя состоит из накопителя энергии емкостного типа с последующим увеличением импульсного напряжения.

Генераторы импульсного напряжения (ГИН)

Генератор импульсного напряжения (ГИН) - предложен Аркадьевым (1916 г.) и разработан Марксом (1928 г.). Параллельно соединенные конденсаторы C заряжаются через резисторы R до напряжения источника U_0. Затем конденсаторы коммутируются искровыми разрядниками так, что они оказываются соединенными последовательно. Выходное напряжение $U = n \cdot U_0$, где n - число каскадов.

Основные особенности:

1. длительность импульса $\tau \leq 1$ мкс,
2. нет принципиальных ограничений на повышение параметров (в основном - геометрические размеры),
3. уникальны по мощности пучка и КПД.

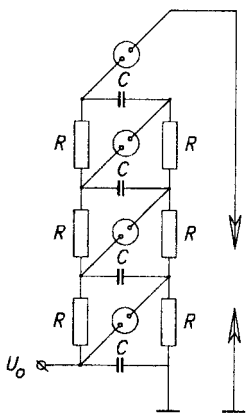


Рис. 1.4. Схема ГИНа

Каскадные генераторы

На рисунке 1.5 показаны основная схема каскадного генератора Кокрофта-Уолтона (1932 г.) и симметричная схема каскадного генератора (Халперн, 1955 г.).

Работа каскадного генератора Кокрофта-Уолтона происходит следующим образом: в течение первого цикла полупериода конденсатор C_1' левой колонны заряжается до напряжения U_2, при втором цикле полупериода конденсатор C_1 правой колонны заряжается до удвоенного напряжения $2U_2$ (U_2 - от трансформатора и + U_2 от конденсатора C_1'); затем происходит заряд C_2' - C_2 и так далее. Через несколько циклов все конденсаторы, кроме первого в левой колонне C_1', оказываются заряженными до удвоенного амплитудного значения вторичной обмотки трансформатора. Полное напряжение на выходе $U = 2nU_2$, где n – число каскадов. Для симметричной схемы полное напряжение на выходе также равно $U = 2nU_2$.

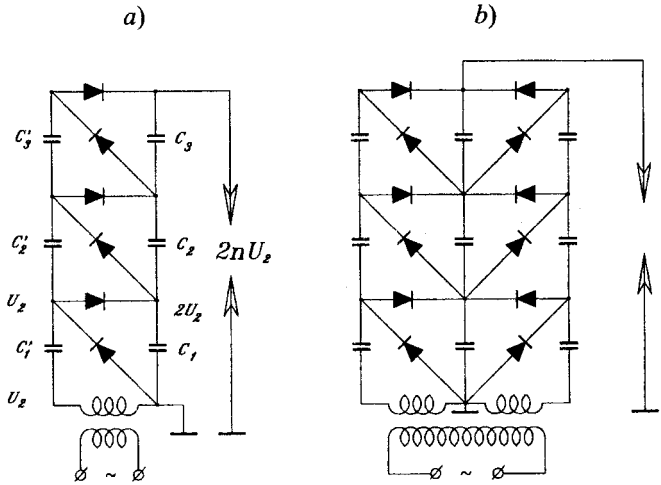


Рис. 1.5. Каскадные генераторы:
a) несимметричная схема (Кокрофт-Уолтон),
b) симметричная схема (Халперн) .

Наличие тока нагрузки приводит к частичной разрядке конденсаторов. Поэтому происходит падение выходного напряжения - основной недостаток каскадных генераторов. Если все емкости одинаковы и равны C, то падение напряжения:

Несимметричная схема Симметричная схема (1.1)

$$\Delta U = \frac{I}{f \cdot C} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 - \frac{1}{6} \cdot n \right), \quad \Delta U = \frac{I}{f \cdot C} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^2 + \frac{1}{12} \cdot n \right),$$

где I - полный ток нагрузки (ток утечки, делителя напряжения и ток ускоренных частиц),

f - частота питающего напряжения.

Для обеих схем $U \sim n$, а $\Delta U \sim n^3$, так что существует оптимальное число каскадов, превышение которого не приводит к дальнейшему росту напряжения. Напряжение каждого каскада обычно $U_1 \sim 100$ - 250 кВ, рабочая частота $f \sim 10$ кГц (при более высокой начинают сказываться паразитные емкости). Обычно число каскадов выбирают равным:

Несимметричная схема Симметричная схема

$$n_0 = \sqrt{\frac{U_1 \cdot f \cdot C}{I}} \approx 30, \qquad n_0 = 2 \cdot \sqrt{\frac{U_1 \cdot f \cdot C}{I}} \approx 60. \qquad (1.2)$$

То есть в симметричной схеме, исходя из приемлемого падения напряжения, выходное напряжение можно сделать в два раза больше.

Из-за переменной рабочей частоты у каскадных генераторов помимо падения напряжения всегда есть пульсации напряжения δU :

Несимметричная схема

$$\delta U = \frac{I}{f \cdot C} \cdot \frac{n \cdot (n+2)}{2},$$

Симметричная схема

$$\delta U = \frac{I}{f \cdot C} \cdot \frac{n}{2}. \qquad (1.3)$$

То есть в симметричной схеме они в $(n+1)$ раза меньше, и, следовательно, применением симметричной схемы их можно уменьшить в 20 - 30 раз. Например, в ядерной физике величина пульсаций не должна превышать 0,1 – 0,05 %.

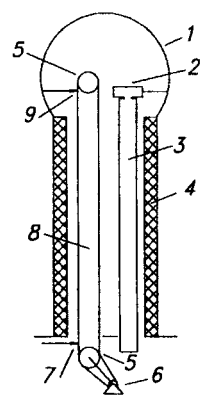
Сейчас серийно выпускаются модифицированные каскадные генераторы на основе симметричной схемы - капатроны (русское название - динамитроны) с повышенной частотой питания до 100 кГц на рабочее напряжение $U \approx 4$ МВ с мощностью пучка до 25 кВт.

Электростатические ускорители (ЭСУ)

Принцип действия электростатического ускорителя (ЭСУ) или генератора Ван де Граафа показан на рисунке 1.6.

Рис. 1.6. Электростатический ускоритель:

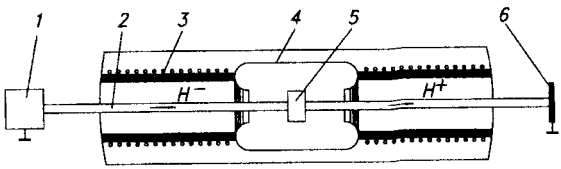
1 - кондуктор;
2 - источник частиц;
3 - ускорительная трубка;
4 - опорная изолирующая колонна;
5 - валики;
6 - двигатель;
7 - зарядное устройство;
8 - зарядная лента;
9 - съемное устройство.



Полый металлический шар - кондуктор - располагается на изолирующей опорной колонне. На кондукторе накапливается электрический заряд, в результате чего на нем создается потенциал U относительно земли. Величина потенциала определяется зарядом Q на кондукторе и его емкостью

относительно земли C: $U = \frac{Q}{C}$. Источник заряженных частиц, расположенный в верхней части ускорительной трубки, находится под потенциалом кондуктора. Заряд переносится на кондуктор плоской бесконечной лентой из изоляционного материала, натянутой на два валика, нижний из которых приводится во вращение электрическим мотором. На ленту внизу с помощью зарядного устройства наносится электрический заряд, который снимается разрядным устройством, расположенным внутри кондуктора. Обычно для нанесения заряда на поверхность движущейся ленты и обратного процесса используются коронирующие острия, расположенные у поверхности ленты.

ЭСУ обладают чрезвычайно высокой стабильностью выходной энергии – относительный энергетический разброс достигает 10^{-4}. Кроме того, в ЭСУ можно ускорять любые ионы. Модификация зарядной системы ЭСУ связана с недостатками, присущими ленточной системе транспортировки: при применении зарядной прорезиненной ленты внутри бака ускорителя из-за ее износа образуется пыль. В процессе заряда ленты с помощью коронирующих острий, а так же из-за случайных электрических разрядов, образуются продукты коррозии металлов, что снижает электрическую



прочность ускорителя. Стремление улучшить зарядную систему привело к системе транспортировки, в которой перенос заряда осуществляется металлическими телами, соединенными между собой диэлектрическими скобами (из нейлона). Металлические тела заряжаются с помощью электростатической индукции. Они могут иметь форму шариков (пеллетроны - от английского *pellet*) или металлических цилиндров (ладдертроны - от английского *ladder* - лестница, трап). При правильно выбранной скорости транспортировки переноса заряда к кондуктору дискретными порциями приводит к очень небольшим колебаниям напряжения на кондукторе с частотой следования металлических тел.

Идея использования перезарядного, или тандемного ускорения (рис. 1.7) позволила удвоить энергию протонов или дейтонов по сравнению с обычными ЭСУ.

Рис. 1.7. Схема высоковольтного ускорения с перезарядкой (тандем):
1 - источник отрицательных ионов; 2 - ускорительная трубка; 3 - элементы крепления высоковольтного электрода; 4 - высоковольтный электрод; 5 - камера перезарядки; 6 - мишень.

Дополнительное преимущество тандемов - размещение ионного источника и мишени вне ускорителя под потенциалом земли. Максимальная энергия, которую удалось получить в тандемном ускорителе, равна 32 МэВ.

Линейные индукционные ускорители (ЛИУ)

У всех ранее рассмотренных линейных ускорителей прямого действия есть принципиальное ограничение на энергию сверху, связанное с развитием пробоя в электростатических приборах.

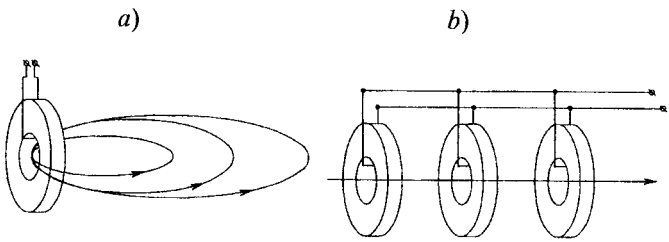


Рис. 1.8. Ускорители с вихревыми полями:
a) принцип работы циклического ускорителя,
b) линейный индукционный ускоритель.

Существует возможность обойти это ограничение, используя не градиентные поля, когда $\vec{E} = -\vec{\nabla} U$, а квазистатическое вихревое поле, связанное с изменением во времени магнитного поля $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. При циркуляции частицы по контуру, охватывающему область изменения магнитного потока Φ, она будет ускоряться вихревым электрическим полем $E_{вих} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ (рис. 1.8, *a*). Этот принцип заложен в работу циклических индукционных ускорителей. Однако можно расположить индукторы последовательно, как показано на рисунке 1.8, *b*, и запитать их все параллельно. Из рисунка видно, что в такой схеме витки, создающие отдельные элементы магнитного потока, соединены тоже параллельно и, следовательно, напряжение на каждом из них может быть существенно меньше ЭДС индукции. Приращение импульса, получаемого ускоренными частицами от одного индуктора в единицу времени,

$$\Delta p = e \cdot E_{вих} = -e \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = e \cdot S \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = e \cdot S \cdot \frac{\Delta B}{\tau}, \qquad (1.4)$$

где S – сечение сердечника индуктора, e – заряд электрона, ΔB – максимальное изменение индукции, τ – длительность импульса. Отсюда следует, что увеличение прироста энергии можно достигнуть увеличением S и ΔB или уменьшением τ. Возрастание S ведет к росту размеров и стоимости сердечников, а также к увеличению потерь в ферромагнетике. Значение τ ограничивается значением порядка десятка наносекунд. При его дальнейшем уменьшении также возрастают потери в ферромагнетике. Современные материалы позволяют получить средний прирост энергии в ЛИУ около 1 МэВ/м при ускоряемых токах порядка $10 \div 10^3$ А.

Характерные параметры ЛИУ:

энергия ускоренных частиц	W = 5 МэВ,
энергетический разброс	$\Delta W/W = 0{,}5 \div 2$ %,
ускоряемый ток	$I_u = 5$ кА,
длительность импульса	$\tau = 20 \div 300$ нс,
частота повторения	F = 1÷60 Гц.

Пока главное применение ЛИУ – инжекторы для формирования электронных колец в ускорителях для коллективного ускорения.

Линейные резонансные ускорители

Видероэ в 1928 г. предложил следующую схему ускорения заряженных частиц:

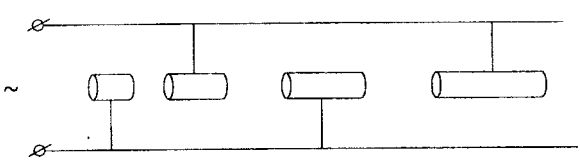


Рис. 1.9. Схема резонансного ускорителя Видероэ

Ускоритель работал на частоте $f = 7$ кГц (рабочая длина волны $\lambda = 42{,}82$ м). Он представлял собой последовательность дрейфовых трубок, через одну соединенных к полюсам источника переменного напряжения. Поле внутри трубок практически отсутствует и сосредоточено только в зазорах между ними. Частицу, ускоренную в одном зазоре, можно ускорить еще раз в следующем, если к моменту ее подхода к зазору напряжение на трубках сменит знак, т. е. пройдет полпериода колебаний напряжения. Если длина n–й трубки дрейфа l_n, скорость частицы в районе n–й трубки v_n, а период колебания T_0, то условие экранирования частицы на полпериода есть

$\frac{l_n}{v_n} = \frac{T_0}{2}$ или $l_n = \frac{\lambda \cdot v_n}{2 \cdot c}$, где $\lambda = c \cdot T_0$ – длина волны ускоряющего поля в свободном пространстве. Так как с ростом энергии скорость частицы увеличивается, а период колебания T_0 не меняется, то длина трубок дрейфа тоже должна увеличиваться с ростом n.

Длина трубок дрейфа, а с ней и общие габариты такого ускорителя ~1/f. Для уменьшения размеров ускорителя надо увеличивать рабочую частоту f. Но при увеличении частоты такая система начинает работать как антенна и излучать в свободное пространство. Поэтому было предложено использовать для ускорения набор отдельных резонаторов, запитываемых извне (см. рис. 1.1, *a*). В них электромагнитное поле сосредоточено внутри резонатора и не излучается наружу. Принцип работы остается прежним: ускоряемая частица находится в ускоряющем электрическом поле (внутри резонаторов) при ускоряющей фазе колебаний в них и экранируется при противофазном напряжении в резонаторах (находясь в зазоре между резонаторами). Следующий шаг - убрать перегородки между резонаторами, образовав один резонатор (см. рис. 1.10, *b*). Трубки дрейфа для экранизации частицы при противофазном напряжении в резонаторе остаются. Добавив стойки для поддержания трубок дрейфа (см. рис 1.10, *c*), мы получаем классический резонансный ускоритель с трубками дрейфа.

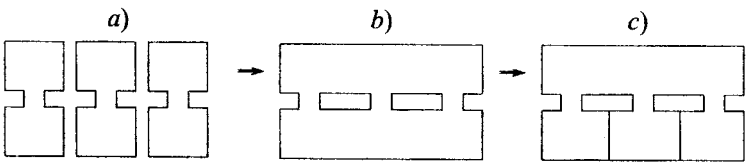


Рис. 1.10. Эволюция ускорителя с отдельными резонаторами к ускорителю Альвареца: *a*) система несвязанных резонаторов,
b) один резонатор с трубками дрейфа,
c) резонансный ускоритель с трубками дрейфа.

Альварец в 1945 г. создал такой ускоритель для ускорения протонов до энергии 32 МэВ на частоте f = 200 МГц (λ = 1,5 м).

При ускорении больших токов в таком ускорителе начинает происходить развал пучка под действием сил пространственного заряда. В 1952 г. Блюэтт предложил расположить внутри трубок дрейфа фокусирующие магниты для сильной квадрупольной фокусировки пучка. В таком виде ускоритель Альвареца работает и сейчас на энергию протонов 100 МэВ с токами порядка 100 мА. До сих пор с параметрами ускорителя Альвареца

сравнивают все вновь разрабатываемые ускорители.

Волноводные линейные ускорители

В цилиндрическом волноводе может распространяться бегущая электромагнитная волна, имеющая продольную компоненту электрического поля на оси $E_z = E_0 \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$. В точках, где $\omega t - \beta z = const$ амплитуда поля постоянна. Эти точки движутся со скоростью $v_ф = \omega / \beta$, называемой фазовой скоростью волны. Если заряженная частица движется по оси со скоростью, равной фазовой скорости волны $v_e = v_ф$, то она будет все время находиться в одном и том же постоянном электрическом поле и приобретать энергию, пропорциональную напряженности электрического поля и пройденному расстоянию.

В простом регулярном цилиндрическом волноводе фазовая скорость волны всегда больше скорости света, а материальные частицы не могут двигаться со скоростью, больше скорости света. Существуют различные способы уменьшения фазовой скорости волны в волноводе, например, размещение в нем металлических диафрагм с отверстием на оси. Внутренние размеры такого диафрагмированного волновода и определяют величину фазовой скорости волны. Волна и частица должны двигаться синхронно на всем протяжении волновода или, другими словами, частица должна оставаться в резонансе с волной. Постепенное увеличение скорости волны (подстройка под увеличивающуюся скорость ускоряемой частицы) обеспечивается изменением внутренних размеров волновода по длине.

Отметим, что в нагруженном диафрагмами волноводе принципиально не может существовать только одна волна с фазовой скоростью волны, равной скорости частицы. В нем всегда присутствуют так называемые высшие пространственные гармоники. Однако эти гармоники имеют фазовые скорости, существенно отличные от скорости основной, ускоряющей гармоники, и частица будет скользить по фазе относительно них. Эти нерезонансные гармоники вносят лишь несущественные колебания в движение частицы.

Глава 2

ЗАМЕДЛЕННЫЕ ВОЛНЫ

Фазовая и групповая скорости

Фазовая скорость волны

Для бегущей волны в регулярном волноводе $\vec{E}(\vec{H}) \sim e^{i(\omega t - \beta z)}$. Величина $\varphi = \omega t - \beta z$ называется фазой волны в направлении z. Более общее определение фазы есть $\varphi = \omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор, $\vec{\beta}$ – волновой вектор. Если фаза постоянна во времени, то

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \vec{\beta} \cdot \vec{v}_\phi . \tag{2.1}$$

$\vec{v}_\phi$ – трехмерная фазовая скорость волны. Она связана с волновым вектором $\vec{\beta} = \frac{\omega}{v_\phi^2} \cdot \vec{v}_\phi$. Для волн, распространяющихся вдоль оси z, $v_\phi = \frac{\omega}{\beta}$.

Если заряженная частица двигается с такой же скоростью, как и волна, то она всегда находится в одном и том же поле, т. е. может непрерывно увеличивать или уменьшать свою энергию. На этом принципе работают линейные ускорители на бегущей волне, а также лампы бегущей волны (ЛБВ).

Групповая скорость

Если имеется некое вещество с объемной плотностью n, то, по определению, групповой скоростью перемещения этого вещества называется

$$\vec{v}_{\text{гр}} = \vec{n} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} . \tag{2.2}$$

Но если ΔW энергии проходит через ΔS площади за время Δt, то она сосредоточена в объеме $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l$. Если плотность энергии на единицу объема есть w, а плотность потока мощности через единичную поверхность $\vec{\Pi}$, то

$$\Delta W = \Delta l \cdot \int_{\Delta S'} w \cdot ds = \Delta t \cdot \int_{\Delta S} \vec{\Pi} \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{гр}} = \frac{\int \vec{\Pi} \cdot d\vec{s}}{\int w \cdot ds} = \frac{P_{cp}}{\int w \cdot ds} = \frac{P_{cp}}{\Delta W / \Delta z} . \tag{2.3}$$

В электродинамике плотность потока мощности через единичную поверх-

ность $\vec{\Pi}$ равна

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} Re\left[\vec{E} \times \vec{H}^*\right], \quad \text{а} \quad w = \frac{1}{4} \cdot \left[\varepsilon\left(\vec{E} \cdot \vec{E}^*\right) + \mu\left(\vec{H} \cdot \vec{H}^*\right)\right]. \tag{2.4}$$

Для немонохроматичной волны (цуга, пакета волн) групповой скоростью называется <u>*скорость перемещения максимума огибающей группы монохроматических волн, близких между собой по частоте.*</u> То есть это скорость, с которой может передаваться информация.

Самый простой пример - сумма двух монохроматических волн:

$$e^{i\cdot(\omega\cdot t-\beta\cdot z)} + e^{i\cdot[(\omega+\delta\omega)t-(\beta+\delta\beta)z]} = \frac{1}{2}\cdot e^{i\cdot\left[\left(\omega+\frac{\delta\omega}{2}\right)t-\left(\beta+\frac{\delta\beta}{2}\right)z\right]} \cdot \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}\cdot t-\frac{\delta\beta}{2}\cdot z\right).$$

Огибающая такого "цуга" описывается в данном примере функцией cos (...), а поверхность постоянной амплитуды есть $\delta\omega\cdot t - \delta\beta\cdot z = const$, и движется она со скоростью $v_{\text{гр}} = \dfrac{\delta\omega}{\delta\beta}$.

Вообще если мы имеем пакет из монохроматичных волн с фазами $\varphi = \omega t - \vec{\beta}\cdot\vec{r}$, то условие того, что в достаточно малой области изменения $\vec{\beta}$ фаза остается постоянной независимо от $\vec{\beta}$, есть $\vec{\nabla}_\beta\left(\omega t - \vec{\beta}\cdot\vec{r}\right) = 0$. Так как $\vec{\nabla}_\beta\left(\vec{\beta}\cdot\vec{r}\right) = \vec{r}$, то $\left[t\cdot\vec{\nabla}_\beta(\omega) - \vec{r}\right] = 0$. Следовательно, $\vec{v}_{\text{гр}} = \vec{\nabla}_\beta(\omega)$.

Для одномерного случая

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial\omega}{\partial\beta}. \tag{2.5}$$

Зависимость $k(\beta)$ (или $\beta(k)$) называется дисперсионным соотношением.

Можно показать, что в регулярных волноводах для E - и H - волн

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = c\cdot\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{c/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}{\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{кр}\right)^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{кр}\right)^2}},$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = v_0^2\cdot\frac{\beta}{\omega} = v_0\cdot\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{кр}\right)^2}, \tag{2.6}$$

где Λ – длина волны в волноводе,

$\lambda_{кр}$ – критическая длина волны волновода.

То есть во всех регулярных волноводах $v_{\text{гр}} \le v_0$, а $v_\phi \ge v_0$, и если волновод не заполнен средой, то в нем невозможно ускорять частицы, так как их скорость всегда меньше c, и невозможно обеспечить синхронизм между фазовой скоростью волны и скоростью ускоряемой частицы.

Для того чтобы заряженные частицы могли эффективно взаимодействовать с полями системы, необходимо, чтобы фазовая скорость волны была меньше или равна скорости света, т. е. необходимо, чтобы в волноведущей системе существовали типы волн с малыми периодами (с малыми Λ). Рассмотрим бесконечную, но периодическую с периодом d по оси z волноведущую систему. По теореме Флоке для систем с периодическими граничными условиями электрические (и магнитные) поля в точках, отстоящих на период d, отличаются только фазой. То есть

$$\vec{E}(z+d,\vec{r}) = e^{-j\theta}\cdot\vec{E}(z,\vec{r}), \tag{2.7}$$

где $\vec{E}(z,\vec{r})$ – периодическая, с периодом d функция.

Тогда можно записать (2.8)

$$\vec{E}(z,\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\vec{E}_n(\vec{r})\cdot e^{-j\beta_n z}, \quad \text{где } \beta_n = \beta_0 + \frac{2\pi n}{d}, \quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots .$$

Период бесконечной периодической системы называют ячейкой, $\theta_n = \beta_n d$ называют сдвигом фазы на ячейку для n-й пространственной гармоники, $\theta = \theta_0 = \beta_0 d$ – основным сдвигом фазы на ячейку, а гармоника с $n = 0$ называется основной гармоникой. $\vec{E}_n(\vec{r})$ – есть амплитуда n-й пространственной гармоники. Длина волны n-й пространственной гармоники, распространяющейся вдоль системы $\Lambda_n = \dfrac{2\pi}{\beta_n}$, может быть меньше λ. Следовательно, ее фазовая скорость может быть меньше скорости света, и ее можно использовать для ускорения заряженных частиц.

В цилиндрической системе координат решение для электрического поля есть

$$E_z(r,\varphi,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n\cdot J_m(\gamma_{\perp n} r)\cdot\cos(m\cdot\varphi)\cdot e^{-j\beta_n z}. \tag{2.9}$$

Здесь $\gamma_{\perp n}{}^2 = k^2 - \beta_n{}^2$. В отличие от регулярного волновода здесь β_n определяются периодичностью системы, а $\gamma_{\perp n}$ выражается через них. Причем если мы рассматриваем замедленные волны (т. е. у которых $v_\phi < c$), то для них $\gamma_{\perp n}{}^2 < 0$. Для описания поперечного распределения поля реальными, а не мнимыми функциями, вводят поперечное число $\kappa_{\perp n} = i\cdot\gamma_{\perp n}$: $\kappa_{\perp n}{}^2 = \beta_n{}^2 - k^2 > 0$.

Функция Бесселя $W = J_m(\gamma_{\perp n} r) = J_m(i\cdot\kappa_{\perp n} r)$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 \cdot \frac{d^2W}{dx^2} + x \cdot \frac{dW}{dx} - \left(x^2 + m^2\right) \cdot W = 0 . \qquad (2.10)$$

Его решения – модифицированные функции Бесселя $I_m(x)$ целого порядка m – связаны с функциями Бесселя соотношением

$$I_m(x) = e^{-m \cdot \frac{\pi}{2} \cdot i} \cdot J_m(i \cdot x) .$$

Основное отличие функций Бесселя от модифицированных функций Бесселя в том, что модифицированные функции Бесселя - монотонно возрастающие функции и не имеют при $r \neq 0$ корней. Поэтому для обращения в ноль продольной составляющей электрического поля на границах системы при некотором радиусе $r = a$ необходимо наличие всего спектра пространственных гармоник. То есть в такой системе не может присутствовать только одна гармоника с фазовой скоростью меньше скорости света. Соотношение же между амплитудами гармоник зависит от конкретной геометрии ячейки.

Фазовая скорость разных пространственных гармоник различна $v_{\phi n} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\beta_0 + \frac{2\pi n}{d}}$ и может быть как больше нуля, так и меньше.

Групповая же скорость всех гармоник $v_{\text{гр}\, n} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_n} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_0} = v_{\text{гр}\,0} = v_{\text{гр}}$ одинакова для всех гармоник и равна групповой скорости основной гармоники. Это естественный результат того, что групповая скорость определяет скорость переноса полной мощности по волноводу, т. е. является характеристикой всего пакета гармоник в целом. Обычно считается, что групповая скорость $v_{\text{гр}} > 0$ в направлении увеличения z – координаты. Системы, у которых фазовая скорость <u>*основной*</u> гармоники $v_{\phi 0} > 0$, т. е. совпадает по направлению с групповой скоростью $v_{\text{гр}}$, называются системами с положительной дисперсией. А системы, у которых фазовая скорость <u>*основной*</u> гармоники $v_{\phi 0} < 0$, т. е. противоположна групповой скорости $v_{\text{гр}}$, называются системами с отрицательной дисперсией.

Исходя из ортогональности функций $e^{-j \cdot \frac{2\pi n}{d} \cdot z}$ на отрезке длиной d при различных n, можно доказать несколько теорем:

Энергия W, запасенная в ячейке замедляющей системы, равна сумме энергий полей отдельных пространственных гармоник:

$$W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n = \frac{\varepsilon_0 d}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_S \vec{E}_n(\vec{r}) \cdot \vec{E}_n^*(\vec{r})\, ds\,. \tag{2.11}$$

Средний по времени поток энергии (средняя мощность) через любое поперечное сечение системы равен сумме потоков энергии отдельных пространственных гармоник:

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} Re \int_S \left[\vec{E}_n \times \vec{H}_n^*\right] ds\,. \tag{2.12}$$

Групповая скорость распространения в замедляющей системе может быть выражена как

$$v_{\text{гр}} = \frac{P}{(W/d)}\,. \tag{2.13}$$

Для осесимметричных систем основной модой, распространяющейся по волноводу, является мода с $m = 0$. Для нее

$$E_z(z,r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \cdot I_0(\kappa_\perp r) \cdot e^{-j\beta_n z}\,. \tag{2.14}$$

На оси системы при $r = 0$:

$$E_z(z, r = 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \cdot e^{-j\beta_n z}\,. \tag{2.15}$$

Остальные компоненты электромагнитного поля на оси структуры равны нулю. Амплитуды гармоник можно найти по известному полю на оси:

$$E_n = \frac{1}{d} \cdot \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z, r = 0) \cdot e^{j\beta_n z}\, dz\,, \tag{2.16}$$

и, естественно, зависят от средней мощности P_0, распространяющейся по замедляющей системе. Отношение $E_n / \sqrt{P_0}$ называют параметром ускоряющего поля для n-й пространственной гармоники. Разработчики замедляющих систем (‘ламповики’) чаще пользуются понятием сопротивления связи n-й гармоники – $R_C = E_n^2 / (2\beta_n^2 P_0)$. Кроме того, для ускоряющих структур введено понятие шунтового сопротивления n-й пространственной гармоники $R_{sh\ n} = E_n^2 / P_{nom}$, где P_{nom} – мощность потерь на единицу длины. Так как амплитуда гармоники E_n фактически равна максимальному приращению энергии ускоряемой частицы в вольтах на единице длины $\Delta\varepsilon / \Delta z$, то шунтовое сопротивление есть отношение квадрата приращения энергии на единице длины к мощности потерь в стенках ускоряю-

щей структуры на единице длины

$$R_{sh\ n} = \frac{(\Delta\varepsilon / \Delta z)^2}{(\Delta P_{cm} / \Delta z)}. \qquad (2.17)$$

Для замедляющих систем также есть понятие коэффициента затухания α, а мощность потерь на единицу длины $P_{пот}$ можно выразить через мощность P_0, протекающую в данном сечении замедляющей системы $P_{пот} = 2\alpha P_0$. Тогда выражение для шунтового сопротивления перепишется как $R_{sh\ n} = \dfrac{E_n^2}{2\alpha P_0}$. Обычно шунтовое сопротивление ускоряющих структур имеет размерность [МОм/м].

Набор энергии в волноводных ускоряющих системах

Уравнение движения заряженной частицы на оси структуры без учета сил пространственного заряда есть

$$\frac{dp_z}{dt} = e \cdot E_z(t,z) = e \cdot E_z(z) \cdot e^{j\omega t}. \qquad (2.18)$$

Координата частицы, движущейся со скоростью v_e вдоль оси z, есть $z = v_e \cdot t$. Делая замену переменных и выражая импульс p_z частицы через кинетическую энергию $\varepsilon_{кин}$, получим

$$\frac{d\varepsilon_{кин}}{dz} = e \cdot E_z(z) \cdot e^{j\omega \cdot \frac{z}{v_e}}. \qquad (2.19)$$

Приращение энергии, полученное частицей на периоде ускоряющей структуры:

$$\Delta\varepsilon_{кин} = e \cdot \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z) \cdot e^{j\omega \frac{z}{v_e}} dz = e \cdot \int_{-d/2}^{d/2} E_z(z) \cdot e^{j\beta_n \cdot \frac{v_ф}{v_e} \cdot z} dz \quad . \qquad (2.20)$$

Будем считать, что скорость частицы при прохождении периода мало меняется, т. е. положим $v_e = const$, а фазовая скорость n-й пространственной гармоники равна скорости частицы, т. е. $\dfrac{\omega}{v_e} = \dfrac{\omega}{v_{фn}} = \beta_n$. Используя выражения для амплитуд гармоник, получим

$$\Delta\varepsilon_{кин} \approx e\, d\, E_n + e \cdot \sum_{m \neq n} E_m \cdot \int_{-d/2}^{d/2} e^{-j \cdot \frac{\pi \cdot (m-n)}{d} z} dz = e \cdot d \cdot E_n.$$

В этом приближении частица увеличивает свою энергию только за счет электрического поля гармоники, фазовая скорость которой совпадает со скоростью частицы. И в общем случае частица эффективно взаимодействует с пространственной гармоникой, фазовая скорость которой близка к скорости частицы. А остальные гармоники вносят некоторую "рябь" в движение частицы. Хотя при точном расчете движения надо учитывать все гармоники. Если электрическое поле постоянно на длине ячейки $E_z(z) = E_0$, то амплитуда n-й пространственной гармоники равна

$$E_n = \frac{1}{d} \cdot \left| \int_{-d/2}^{d/2} E_0 \cdot e^{j\beta_n z} dz \right| = E_0 \cdot \frac{sin(\theta_n / 2)}{\theta_n / 2}. \qquad (2.21)$$

Для основной пространственной гармоники зависимость электрического поля от радиуса $I_0(\kappa_\perp r)$. Для частицы, у которой скорость совпадает со скоростью ускоряющей гармоники,

$$\kappa_\perp = \sqrt{\beta^2 - k^2} = \beta\sqrt{1-\beta_e^2} = \frac{2 \cdot \pi}{\beta_e \gamma_e \lambda},$$

где $\gamma_e = 1/\sqrt{1-\beta_e^2}$ – гамма-фактор движущейся частицы. Тогда поперечное распределение электрического поля ускоряющей гармоники есть $I_0\left(\frac{2\pi r}{\beta_e \gamma_e \lambda}\right)$. Модифицированная функция Бесселя I_0 является монотонно возрастающей функцией аргумента. Поэтому у медленных волн с $v_\phi < c$ в отличие от волн в регулярных волноводах, где $v_\phi > c$, электрическое поле оказывается прижатым к краям и имеет минимум на оси (см. рис. 2.1).

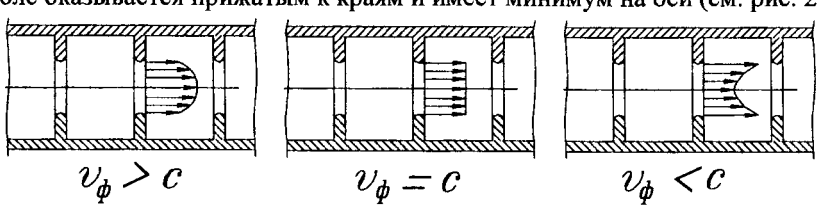


Рис. 2.1. Распределение электрического поля в круглом диафрагмированном волноводе при различных v_ϕ пространственных гармоник

Для ускорителей электронов, в которых электроны движутся со скоростью света $\beta_e \approx 1$, $\gamma_e \to \infty$, а $I_0 \approx I_0(0) = 1$. То есть электроны, находящиеся

на разных радиусах, приобретают одинаковую энергию. Для протонных ускорителей (а также для электронных в начальной части ускорителя) распределение по радиусу может быть значительным. Например, для протонов с кинетической энергией $W = 400$ кВ (обычная энергия инжекции протонных ускорителей) $\beta_e = 0{,}03 << 1$. Если рабочую длину волны выбрать $\lambda = 10$ см (как у электронных ускорителей), то на радиусе 0,5 мм электрическое поле будет отличаться от поля на оси в $I_0\left(\frac{2\pi \cdot 0{,}5}{100 \cdot 0{,}3}\right) \approx I_0(1) \approx 1{,}26$ раза! Поэтому протонные ускорители работают на длине волны 1 м. При этом поле увеличивается в 1,26 раза уже на приемлемом радиусе 5 мм.

Замечание

По аналогии с резонаторами для волноводных ускоряющих структур вводят понятие *волноводной добротности* - отношение энергии, запасенной в волноводе *на единице длины* к мощности потерь в стенках волновода *на единице длины* за период

$$Q_B \equiv Q_{0A} = \omega \cdot \frac{\Delta W / \Delta z}{\Delta P_{cp} / \Delta z}. \tag{2.22}$$

Для волноводов введено понятие групповой скорости $v_{гр}$

$$v_{гр} = \frac{\int \vec{\Pi} \cdot d\vec{s}}{\int w \cdot ds} = \frac{P_{cp}}{\int w_{cp} \cdot ds} = \frac{P_{cp}}{\Delta W / \Delta z}. \tag{2.23}$$

Мощность, распространяясь по волноводу, затухает с коэффициентом затухания α: $P_{cp} = P_0 \cdot \exp(-2\alpha z)$. Тогда мощность потерь на единицу длины есть $\left|\frac{\Delta P_{cp}}{\Delta z}\right| = 2\alpha P_0$, откуда можно получить связь между коэффициентом затухания и волноводной добротностью

$$\alpha = \frac{\omega}{2Q_B v_{гр}} = \frac{\pi}{Q_B \lambda \beta_{гр}}, \tag{2.24}$$

где $\beta_{гр} = \frac{v_{гр}}{c}$ – относительная групповая скорость.

Кроме того, для волноводных ускоряющих структур вводят понятие постоянной времени ускоряющей структуры

$$\tau_{0A} = \frac{2 \cdot Q_B}{\omega} = \frac{1}{\alpha \cdot v_{гр}}. \tag{2.25}$$

Глава 3

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК УСКОРЯЮЩИХ СИСТЕМ

Цепочка связанных резонаторов

Ускоряющая система может состоять из нескольких резонаторов, в которых относительная фаза колебаний θ может задаваться извне или определяться связью резонаторов друг с другом. На рисунке 3.1 показана эквивалентная схема для бесконечной цепочки одинаковых связанных резонаторов.

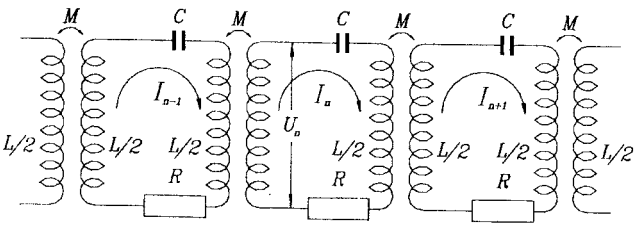


Рис. 3.1. Эквивалентная схема цепочки связанных резонаторов

Уравнение Кирхгофа для n -го контура имеет вид

$$\frac{1}{j\omega C}\cdot I_n + j\omega L\cdot I_n + R\cdot I_n + j\omega M\cdot I_{n-1} + j\omega M\cdot I_{n+1} = 0\,. \qquad (3.1)$$

По теореме Флоке напряжения и токи в соседних ячейках бесконечной цепочки связанных одинаковых резонаторов могут отличаться только фазой, то есть $I_{n+1} = I_n \cdot e^{-j\theta}$ а $I_{n-1} = I_n \cdot e^{j\theta}$. Вводя безразмерный коэффициент связи $k = \dfrac{M}{L}$, получим

$$-\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 1 - j\cdot\frac{\omega_0}{Q_0\omega} + 2\cdot k\cdot\cos\theta = 0\,, \qquad (3.2)$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ – собственная частота резонатора,

$Q_0 = \dfrac{\omega_0 L}{R}$ – собственная добротность резонатора.

При высокой добротности резонатора пренебрежем членом, содержащим Q_0. Тогда дисперсионное уравнение для цепочки связанных резонаторов

запишется как

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + 2k\cos\theta}}. \qquad (3.3)$$

Если длина отдельного резонатора d, то сдвиг фазы на ячейку θ можно выразить через длину волны рабочей пространственной гармоники λ_g: $\theta = \beta_z \cdot d = 2\pi\, d / \lambda_g$. Тогда фазовая и групповая скорости распространения волны в системе связанных резонаторов равны

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{\omega_0 d}{\theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2k\cos\theta}}, \qquad (3.4)$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial\omega}{\partial\beta_z} = k\omega_0 d \cdot \frac{\sin\theta}{(1 + 2k\cos\theta)^{3/2}}.$$

Можно получить выражение для групповой скорости из энергетических характеристик цепочки: Мощность, распространяющаяся по цепочке –

$$P = \frac{1}{2} \cdot Re\left(U_n \cdot I_n^*\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(U_n \cdot I_n^* + U_n^* \cdot I_n\right), \qquad (3.5)$$

где $U_n = j\omega\frac{L}{2} \cdot I_n + j\omega M \cdot I_{n-1} = j\omega \cdot L \cdot I_n \cdot \left(\frac{1}{2} + k \cdot e^{j\theta}\right)$,

откуда $$P = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot L\, k\, I_n I_n^* \cdot \sin\theta.$$

Энергия, запасенная в n - й ячейке – $W = C \cdot \frac{U_C U_C^*}{2} = \frac{1}{\omega^2 C} \cdot \frac{I_n I_n^*}{2}$.

Используя выражение для групповой скорости в бесконечной периодической системе с периодом d, получим

$$v_{\text{гр}} = \frac{P}{(W / d)} = \frac{\omega^3}{\omega_0^2} \cdot kd \cdot \sin\theta = k\omega_0 d \cdot \frac{\sin\theta}{(1 + 2k\cos\theta)^{3/2}}. \qquad (3.6)$$

На рисунке 3.2 показаны дисперсионные кривые для различных значений коэффициента связи k. Видно, что дисперсия цепочки отрицательна при $k < 0$ и положительна при $k > 0$. Частота, соответствующая виду колебания $\theta = \pi / 2$, не зависит от коэффициента связи и равна $f = f_0 = \omega_0 / 2\pi$. Полоса пропускания цепочки зависит от коэффициента связи и лежит в пределах $f_{min} \le f \le f_{max}$, где $f_{min} = \frac{f_0}{\sqrt{1 + 2 \cdot |k|}}$, а $f_{max} = \frac{f_0}{\sqrt{1 - 2 \cdot |k|}}$.

На границах полосы пропускания при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, как и должно быть, групповая скорость равна нулю.

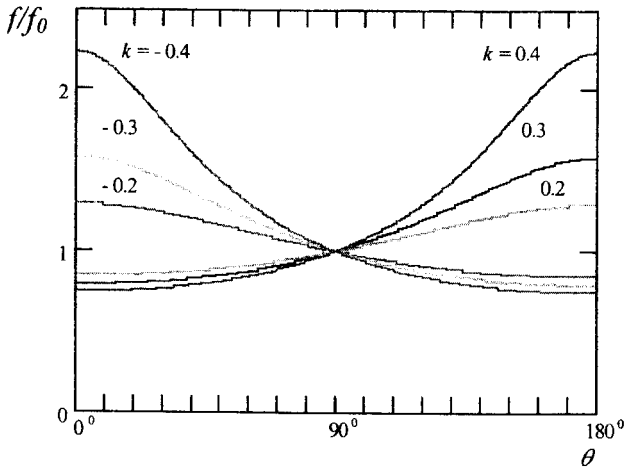


Рис. 3.2. Дисперсионные зависимости для различных значений коэффициента связи k

Расчет круглого диафрагмированного волновода с малым отверстием связи

Рассмотрим круглый диафрагмированный волновод (КДВ), состоящий из одинаковых цилиндрических резонаторов диаметром $2b$, возбуждаемых на E_{010} – типе колебания. Каждый резонатор связан с соседними резонаторами малым отверстием связи диаметром $2a$. Полный период системы – d. Рабочая гармоника имеет осесимметричное электрическое поле на оси $E_z = E_0 \cdot e^{-i\frac{\theta}{d}z} = e^{-i\beta z}$, где θ – сдвиг фазы на ячейку. Из уравнений Максвелла в осесимметричном случае имеем:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = i\omega\varepsilon \vec{E}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial}{\partial r}\left(H_\varphi r\right) = i\omega\varepsilon E_z, \\ \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial}{\partial r}\left(E_r r\right) = i\beta E_z. \end{cases} \tag{3.7}$$

Если отверстие связи мало, то можно считать, что на нем поле E_z не зависит от z. Тогда интегрирование уравнений дает распределение E_r и H_φ на отверстии

$$H_\varphi \approx \frac{i\omega\varepsilon}{2}\cdot r\cdot E_z,$$
$$E_r \approx \frac{i\beta}{2}\cdot r\cdot E_z. \qquad (3.8)$$

Мощность, распространяющуюся по волноводу $P = P_z$, можно вычислить, проинтегрировав z-компоненту вектора Умова-Пойнтинга по отверстию связи

$$P = \frac{1}{2}\int_S E_r\cdot H_\varphi^* ds = E_0^2\cdot\frac{\omega\,\varepsilon\,\beta}{8}\cdot 2\pi\cdot\int_0^a r^3 dr = \frac{\pi^3}{4}\cdot\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4\cdot\frac{(E_0\cdot\lambda)^2}{Z_0\beta_\phi}, \qquad (3.9)$$

где $Z_0 = 120\cdot\pi$ ·Ом, $\beta_\phi = \frac{v_\phi}{c}$ – относительная фазовая скорость волны. Параметр ускоряющего поля

$$\frac{E_0}{\sqrt{P}} = 6.97\cdot\frac{\lambda}{a^2}\sqrt{\beta_\phi} \approx 7\cdot\left(\frac{\lambda}{a^2}\right)\sqrt{\beta_\phi}\,. \qquad (3.10)$$

Все измерения в системе СИ.

Полная запасенная энергия в отдельном цилиндрическом резонаторе диаметром $2b$ и высотой d (считаем, что толщина диафрагмы с отверстием связи равна нулю), возбуждаемом на E_{010} – типе колебания:

$$W_S = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\int_V |E_z|^2 dV = \frac{\pi\,\varepsilon\,b^2 d\,J_1^2\left(\nu_{01}^E\right)}{2}\cdot E_S^2, \qquad (3.11)$$

где E_S – амплитуда электрического поля на оси E_{010} – резонатора, индекс S означает стоячую волну. Запасенная энергия в резонаторе в стоячем режиме в два раза больше, чем в бегущем $W_S = 2\cdot W_t$. Амплитуда поля на оси в стоячем режиме также в два раза больше, чем в бегущем $E_S = 2\cdot E_t$. Амплитуда ускоряющей гармоники E_0 для связанных резонаторов с постоянным электрическим полем на оси E_t есть

$$E_0 = E_t\cdot T = E\cdot\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}. \qquad (3.12)$$

Радиус E_{010} –резонатора b выражается через длину волны

$b = \lambda\cdot\frac{\nu_{01}^E}{2\pi} = \frac{c\cdot\nu_{01}^E}{\omega}$. Учитывая все это, запишем

$$\frac{W_t}{d} = \frac{c^2 \pi \varepsilon}{\omega^2} \cdot \left[\frac{\nu_{01}^E \cdot J_1\left(\nu_{01}^E\right)}{T} \right]^2 \cdot E_0^2 . \qquad (3.13)$$

Зная мощность, распространяющуюся по волноводу P, и запасенную энергию на единицу длины W_t / d, можно найти групповую скорость:

$$v_{\text{гр}} = \frac{P}{\left(W_t / d\right)} = \frac{c}{\beta_\phi} \cdot \left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)^4 \cdot \left[\frac{T}{\nu_{01}^E \cdot J_1\left(\nu_{01}^E\right)} \right]^2 . \qquad (3.14)$$

Так как отверстие связи мало, то волноводная добротность Q_B равна собственной добротности E_{010} – резонатора Q_0. Зная волноводную добротность системы и групповую скорость, можно найти коэффициент затухания в КДВ α и его шунтовое сопротивление R_{sh}. Шунтовое сопротивление системы $R_{sh} \sim \left[\frac{\sin\left(\theta / 2\right)}{\theta / 2} \right]^2 \cdot \frac{1}{1 + a / d}$. Радиус резонатора выражается через длину волны, а период системы d можно выразить через сдвиг фазы на ячейку θ:

$$a = \lambda \cdot \frac{\nu_{01}^E}{2\pi}, \; d = \lambda_g \cdot \frac{\theta}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad a / d = \frac{\nu_{01}^E}{\theta} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_g} = \frac{\nu_{01}^E}{\beta_\phi \cdot \theta},$$

где λ_g – длина волны в волноводе.

Отсюда получим, что шунтовое сопротивление пропорционально

$$R_{sh} \sim \left[\frac{\sin\left(\theta / 2\right)}{\theta / 2} \right]^2 \cdot \frac{1}{1 + \nu_{01}^E / \left(\beta_\phi \theta\right)} \Bigg|_{\beta_\phi = 1} = \left[\frac{\sin\left(\theta / 2\right)}{\theta / 2} \right]^2 \cdot \frac{1}{1 + \nu_{01}^E / \theta} . \qquad (3.15)$$

Максимум этого выражения находится из уравнения

$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\theta^2 + \nu_{01}^E \cdot \theta}{2 \cdot \theta + \nu_{01}^E} \Rightarrow \theta_{\max} = 1{,}804$. Это значение $\theta_{\max}$ лежит между $\theta = \pi/2 = 1{,}57$ и $\theta = 2\pi/3 = 2{,}09$, которые обычно используются в ускорителях электронов. На самом деле найденный максимум шунтового сопротивления очень незначителен:

$$R_{sh} \sim \left[\frac{\sin\left(\theta / 2\right)}{\theta / 2} \right]^2 \cdot \frac{1}{1 + \nu_{01}^E \cdot \theta} = \begin{cases} 0{,}320 & \text{при } \theta = \pi/2, \\ 0{,}324 & \text{при } \theta = 1{,}804, \\ 0{,}318 & \text{при } \theta = 2\pi/3. \end{cases}$$

Кроме того, простые дробные значения от 2π предпочтительны с точки зрения высокочастотных измерений характеристик ускоряющих структур и согласования волновода.

Зависимости характеристик ускоряющих структур от частоты

Выбор рабочей частоты линейного ускорителя является довольно сложной задачей. Он включает в себя анализ не только самой ускоряющей структуры, но и источника ВЧ-мощности, фокусирующей системы, светимости ускорителя и так далее. Поэтому полезно знать зависимости основных электродинамических характеристик от частоты. Кроме того, знание этих зависимостей необходимо и на этапе экспериментального исследования ускоряющих структур. Например, если надо исследовать свойства сложного резонатора для ускорителя протонов, работающего на длине волны ~ 1м, то нет необходимости изготавливать первый макет такого резонатора сразу на рабочую частоту (его размер ~ длины волны). Можно изготовить макет на длину волны ~ 10 см, найти его характеристики, а затем, зная частотные зависимости этих характеристик от частоты, пересчитать их на рабочую частоту ускорителя. Обратный пример – ускоряющая структура для линейного коллайдера, имеющего рабочую частоту ~ 2 см. Изготовление таких структур требует очень большой точности, что сразу увеличивает стоимость изготовления макета, а также усложняет проведение измерений характеристик при таких размерах.

Если в уравнениях Максвелла все координаты и время изменить в одно и то же число раз, то они от этого не изменятся. Для периодических процессов это означает, что если все линейные размеры системы и рабочую длину волны в ней изменить в одно и то же число раз, то распределение электромагнитных полей в ней останется прежним. Так как распределение полей останется прежним, то и относительные амплитуды пространственных гармоник (в том числе и рабочей, ускоряющей) останутся прежними. Есть несколько так называемых λ - инвариантов - величин, остающихся неизменными при таких пространственно-временных изменениях, то есть не зависящих от частоты. Если все размеры исследуемой ускоряющей структуры уменьшить или увеличить в несколько раз, то во столько же раз уменьшится или увеличится рабочая длина волны системы. При этом величина λ - инвариантов останется неизменной. К λ - инвариантам, помимо относительной амплитуды рабочей пространственной гармоники, относятся:

фазовая скорость

n-й пространственной гармоники v_{ϕ},

групповая скорость $v_{\text{гр}}$,

параметр ускоряющего поля n-й гармоники,

умноженный на длину волны $\dfrac{E_n \cdot \lambda}{\sqrt{P}}$,

сопротивление связи n-й гармоники $R_C = \dfrac{E_n^2}{2\beta_n^2 P}$.

Ниже приведены частотные зависимости некоторых основных электродинамических характеристик ускоряющих систем:

шунтовое сопротивление $R_{sh} \sim f^2$,

параметр ускоряющего поля $\dfrac{E_n}{\sqrt{P}} \sim f$,

собственная добротность резонатора
или волноводная добротность
ускоряющей структуры на бегущей волне $Q_{0A} \sim f^{-1/2}$,

коэффициент затухания $\alpha \sim f^{3/2}$,

параметр потерь $k = \dfrac{\omega \cdot R_{sh}}{4 \cdot Q} \sim f^2$,

эластенс $S = \dfrac{E_n^2}{W} = \dfrac{\omega \cdot R_{sh}}{Q} = 4 \cdot k \sim f^2$.

Зная частотные зависимости этих основных параметров структуры, можно определить и частотные зависимости других интересующих величин.

Глава 4

ВОЗБУЖДЕНИЕ УСКОРЯЮЩИХ СТРУКТУР

Мощность, распространяющаяся по структуре, $\frac{dP}{dz} = -2\,\alpha\,P$ или

$$-2\,\alpha\,P = \frac{dP}{dz} = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{v_{\text{гр}}}\cdot\frac{\partial P}{\partial t}. \tag{4.1}$$

Откуда получим

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{v_{\text{гр}}(z)}\cdot\left[\frac{2}{\tau_{0A}}\cdot P(z,t) + \frac{\partial P(z,t)}{\partial t}\right]. \tag{4.2}$$

Прямой подстановкой можно проверить, что при граничном условии $P(z=0,t) = P_0(t)$ его решение есть

$$P(z,t) = P_0\left(t - \int_0^z \frac{dz'}{v_{\text{гр}}(z')}\right)\cdot\exp\left(-\frac{2}{\tau_{0A}}\cdot\int_0^z \frac{dz'}{v_{\text{гр}}(z')}\right). \tag{4.3}$$

$P_0(t) = P(z=0,t)$ - зависимость входной мощности при $z=0$ от времени.

По характеру распространения мощности ускоряющие структуры (УС) делятся на два класса – структуры с постоянным импедансом (CZ) и структуры с постоянным градиентом (CG).

УС с постоянным импедансом (CZ)

Ранее для характеристики ускоряющего поля были введены параметр ускоряющего поля $E/\sqrt{P}$ и шунтовое сопротивление R_{sh}. В литературе иногда встречается понятие последовательного сопротивления структуры R_{Π}: $R_{\Pi} = \frac{E^2}{2P} = \alpha\,R_{sh}$ и проводимости структуры Γ: $\frac{1}{\Gamma} = \frac{E^2}{P} = 2\,\alpha\,R_{sh}$. Ускоряющие структуры, у которых $\alpha\,R_{sh} = const$ вдоль всей структуры, называются структурами с постоянным импедансом (CZ). Точнее, структуры, у которых коэффициент затухания $\alpha = const$, так как шунтовое сопротивление структуры зависит от выбранной топологии отдельной ячейки и слабо зависит от элемента связи между ячейками. Примером является рассмотренный ранее круглый диафрагмированный волновод с малым отверстием связи. Так как для CZ-структуры $\alpha = const$, то для них и групповая скорость $v_{\text{гр}} = const = L/T_f$, здесь L – длина структуры,

а $T_f = L / v_{гр}$ – время заполнения УС. Как частный, но часто используемый пример CZ-структуры – УС с постоянной геометрией ячеек.

При $v_{гр} = const$ решение уравнения для распространяющейся мощности записывается в виде

$$P(z,t) = P_0\left(t - \frac{z}{v_{гр}}\right) \cdot exp\left(-\frac{2}{\tau_{0A}} \cdot \frac{z}{v_{гр}}\right). \qquad (4.4)$$

Распределение амплитуды ускоряющей гармоники вдоль CZ-структуры

$$E(z,t) = E_0\left(t - \frac{z}{v_{гр}}\right) e^{-az}, \qquad (4.5)$$

где $E_0(t) = E(0,t)$ – амплитуда ускоряющего электрического поля на входе в УС при z=0.

Если на вход УС поступает постоянная мощность $P(z = 0,t) = P_0 = const$, то распределение мощности вдоль структуры

$$P(z) = P_0 \cdot \exp\left(-\frac{2}{\tau_{0A}} \cdot \frac{z}{v_{гр}}\right) = P_0 \cdot \exp(-2\,\alpha\, z), \qquad (4.6)$$

а распределение ускоряющего электрического поля

$$E(z) = E_0 \cdot \exp(-\alpha\, z), \qquad (4.7)$$

где $E_0 = \sqrt{2\alpha\, R_{sh} P_0}$.

Заряженная частица, пролетая УС длиной L, наберет энергию

$$U = \int_0^L E(z)dz = \frac{E_0}{\alpha} \cdot \left(1 - e^{-\alpha L}\right) = U_m \cdot \frac{1 - \exp(-\alpha L)}{\sqrt{\alpha L}}, \qquad (4.8)$$

где $U_m = \sqrt{2 P_0 R_{sh} L}$.

Параметр $\tau = \int_0^L \alpha(z)dz = \alpha\, L = \frac{L}{\tau_{0A}\, v_{гр}} = \frac{T_f}{\tau_{0A}}$ называют постоянной затухания структуры.

Максимум набираемой энергии находится из решения уравнения $\exp(\tau) = 1 + 2\,\tau$. Его решение $\tau = 1{,}256$, а максимальный набор энергии равен $U = 0{,}638 \cdot U_m$.

Для характеристики УС вводят понятие КПД структуры η – отношение запасенной в УС энергии после окончания ВЧ-импульса к полной энергии в импульсе, поступившей от генератора:

$$\eta = \frac{\int W_e dz}{P_0 T_f} = \frac{\int \frac{P(z)}{v_{\text{гр}}} dz}{P_0 T_f} = \frac{P_0 \cdot \int_0^L e^{-2\alpha z} dz}{v_{\text{гр}} P_0 T_f} = \frac{1 - \exp(-2\tau)}{2\tau}. \qquad (4.9)$$

При τ = 1,256 получим, что КПД УС равно $\eta\Big|_{x=1,256} = 36$ % ! Остальное уходит в тепло. Кроме того, ускоряющее поле уменьшается от входа к нагрузке в 3,6 раза: $\frac{E(L,T_f)}{E(0,T_f)} = \frac{1}{3,6}$. Для достижения более высокого КПД обычно выбирают параметр τ = 0,5. При этом имеем $\eta\Big|_{0,5} = 63\%$, меньшую неоднородность поля $\frac{E(L,T_f)}{E(0,T_f)} = \frac{1}{2,5}$, но происходит небольшой недобор по энергии (примерно на 13 %) $U_{0.5} = 0,556 \cdot U_m$.

УС с постоянным градиентом (CG)

В каждом сечении ускоряющей структуры амплитуда ускоряющей гармоники равна $E(z) = \sqrt{2\,\alpha(z) R_{sh}(z) P(z)}$. При рассмотрении примера расчета КДВ с малым отверстием связи было показано, что шунтовое сопротивление не зависит от размеров отверстия связи *a*, а коэффициент затухания очень сильно - $\alpha \sim 1/v_{\text{гр}} \sim a^{-4}$. Поэтому если, например, изменением отверстия связи сделать так, чтобы коэффициент затухания $\alpha(z)$ изменялся вдоль структуры обратно пропорционально ВЧ-мощности $P(z)$, то в ней амплитуда ускоряющей гармоники будет постоянна вдоль всей структуры $E(z) = E_0 = const$. Такие ускоряющие структуры называются структурами с постоянным градиентом (CG). Так как в такой структуре $\frac{dP}{dz} = -2\,\alpha\,P = const$, то можно найти распределение мощности вдоль УС

$$P(z) = P_0 - \frac{z}{L} \cdot (P_0 - P_L), \qquad (4.10)$$

где P_0 и P_L – ВЧ-мощность на входе и выходе УС. Если использовать определение постоянной затухания структуры $\tau = \int_0^L \alpha(z) dz$, то распределе-

ние мощности вдоль УС можно записать как

$$P(z) = P_0 \cdot \left[1 - \frac{z}{L} \cdot \left(1 - e^{-2\cdot\tau}\right)\right]. \qquad (4.11)$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P_0 - P_L}{L} = -\frac{P_0}{L} \cdot \left(1 - e^{-2\cdot\tau}\right) = -2\alpha\, P = -\frac{2}{\tau_{0A} \cdot v_{\text{гр}}(z)} \cdot P(z).$$ Отсюда можно получить выражение для групповой скорости

$$v_{\text{гр}}(z) = \frac{2 \cdot L}{\tau_{0A}} \cdot \frac{\left[1 - \frac{z}{L} \cdot \left(1 - e^{-2\cdot\tau}\right)\right]}{\left(1 - e^{-2\cdot\tau}\right)} = v_{\text{гр}}(0) \cdot \left(1 - \frac{2z}{\tau_{0A}\, v_{\text{гр}}(0)}\right), \qquad (4.12)$$

и времени заполнения структуры

$$T_f = \int_0^L \frac{dz}{v_{\text{гр}}(z)} = \tau_{0A} \cdot \tau\,. \qquad (4.13)$$

Заметим, что время заполнения CZ-структуры имеет такое же выражение. Набор энергии в CG-структуре

$$U = E_0 \cdot L = U_m \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2\cdot\tau}}{2}}\,, \qquad (4.14)$$

где $U_m = \sqrt{2P_0 R_{sh} L}$ – как и в CZ-структуре.

КПД CG-структуры имеет такое же выражение, как и CZ-структуры

$$\eta = \frac{1 - exp(-2\,\tau)}{2\,\tau}\,. \qquad (4.15)$$

Глава 5

ВОЗБУЖДЕНИЕ СЕКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УМНОЖИТЕЛЯ МОЩНОСТИ SLED

Переходный процесс в одиночном резонаторе

Резонатор со связью (рис. 5.1, *a*) можно представить эквивалентной схемой на сосредоточенных элементах (рис. 5.1, *b*). В эквивалентной схеме окно связи с подводящим волноводом с волновым сопротивлением ρ представляется обычно трансформатором с коэффициентом связи M, связывающим ЭДС, наводимую во вторичной цепи, с изменением тока в первичной цепи:

$$U_{2\,(1)} = M \cdot \frac{dI_{1\,(2)}}{dt}.$$

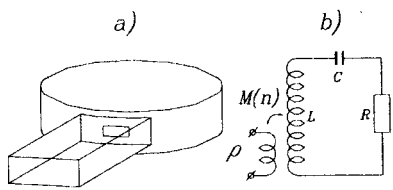


Рис. 5.1. Резонатор со связью:
a) цилиндрический резонатор с подводящим волноводом,
b) его эквивалентная схема.

Иногда пользуются прямым отношением количества витков N в первичной и вторичной обмотках эквивалентного трансформатора связи $n = N_1 / N_2$. Емкость C соответствует месту сосредоточения электрического поля, а индуктивность L – магнитного. Однако такая замена иногда не вполне очевидна. Например, в тороидальном резонаторе на рис. 5.2, *a* эти места ярко выражены – емкость соответствует зазору тороидального резонатора, а индуктивность – охватывающему кольцу.

Рис. 5.2. Различные типы резонаторов:
a) тороидальный,
b) цилиндрический с E_{010} - типом колебаний,
c) цилиндрический с H_{011} - типом колебаний.

Для E_{010} - резонатора (рис. 5.2, *b*) торцевые стенки тоже с некоторой на-

тяжкой можно отождествить с емкостью эквивалентной схемы, а часть торцевой стенки и боковую стенку – с индуктивностью. Что же касается резонатора с H_{011} типом колебания (рис. 5.2, *с*), то неясно, что называть емкостью, так как у этого типа колебания силовые линии электрического поля не замыкаются на поверхность резонатора.

И все же если рассматривать резонатор как целое, то есть представлять его эквивалентной схемой с одной индуктивностью и с одной емкостью, можно показать, что емкость C как элемент, в котором запасается энергия электрического поля, пропорциональна запасенной энергии электрического поля резонатора $C \sim \int\limits_V \varepsilon \cdot |E|^2 dv$, индуктивность пропорциональна энергии магнитного поля резонатора $L \sim \int\limits_V \mu \cdot |H|^2 dv$, сопротивление пропорционально мощности потерь в стенках резонатора $R \sim \int\limits_S |H_t|^2 ds$, где H_t – тангенциальная составляющая магнитного поля на поверхности резонатора S. Коэффициент связи пропорционален потоку мощности через отверстие связи $S_{от}$: $M \sim \int\limits_S \left[\vec{E} \times \vec{H}^*\right] d\vec{s}$.

Разобьем эквивалентную схему на две части (см. рис. 5.3): трансформатор с коэффициентом связи M и полное сопротивление резонатора Z, которое при возбуждении резонатора на определенной частоте ω равно

$$Z(\omega) = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R \cdot \left[1 + i\frac{\omega_0 L}{R} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right], \qquad (5.1)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – собственная частота резонатора.

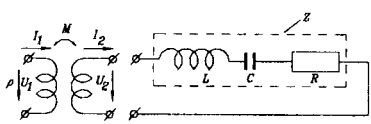


Рис. 5.3. Отдельные элементы эквивалентной схемы резонатора

Если частота возбуждения резонатора мало отличается от собственной частоты резонатора, то

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \cdot \omega_0} \approx 2 \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = 2 \cdot \delta_\omega,$$

где $\delta_\omega = \dfrac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ называют параметром расстройки.

Можно показать, что отношение $\frac{\omega_0 L}{R} = Q_0$. Тогда $Z = R \cdot (1 + i\,2Q_0\delta_\omega)$. Из определения коэффициента связи M следует, что напряжения U_1 и U_2 в трансформаторе при возбуждении на определенной частоте ω равны $U_2 = -i\,\omega\,M\,I_1$, $U_1 = i\,\omega\,M\,I_2$. Так как $U_2 = I_2 \cdot Z$, то отношение U_1 / I_1, называемое входным сопротивлением цепи, равно

$$Z_{BX} = \frac{U_{BX}}{I_{BX}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{\omega^2 M^2}{Z}.$$

Входное напряжение U_{BX} можно представить как сумму двух волн - падающей $U_П$ и отраженной U_O: $U_{BX} = U_П + U_O$. При этом входной ток I_{BX} будет равен $I_{BX} = I_П - I_O$. Напряжения падающей и отраженной волн связаны с токами этих волн как $U_{П(O)} = \rho \cdot I_{П(O)}$, где ρ - волновое сопротивление подводящей линии. Отсюда можно получить выражение для коэффициента отражения Г, который равен отношению амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей

$$\Gamma = \frac{U_O}{U_П} = -\frac{\rho - Z_{BX}}{\rho + Z_{BX}} = -\frac{1 - \frac{\omega^2 M^2}{\rho R} + 2iQ_0\delta_\omega}{1 + \frac{\omega^2 M^2}{\rho R} + 2iQ_0\delta_\omega}.$$

Можно показать, что ранее введенный коэффициент связи резонатора с подводящим трактом β равен $\beta = \frac{\omega^2 M^2}{\rho R}$. Окончательно для коэффициента отражения имеем

$$\Gamma(\omega) = \frac{\beta - [1 + 2iQ_0\delta_\omega]}{\beta + [1 + 2iQ_0\delta_\omega]}. \qquad (5.2)$$

Переходные процессы в резонаторе можно исследовать, например, используя преобразование Лапласа, при котором однозначной функции (оригиналу) $F(t)$ ставится в соответствие единственная функция (изображение) $f(p)$ комплексной переменной $p = \sigma + i\omega$:

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(p)\cdot e^{pt}\,dp$$

$$\Updownarrow$$

$$f(p)=\int_{0}^{\infty} F(t)\cdot e^{-pt}\,dt.$$

Пусть зависимость от времени падающей на резонатор волны имеет вид $U_0(t)=U(t)\cdot e^{i\omega t}$, где ω – частота задающего генератора. Тогда, если огибающая $U(t)$ имеет своим изображением функцию $u(p)$, функция $U_0(t)$ будет иметь своим изображением функцию $u_0(p)=u(p-i\omega)$.

$$U_0(t)=U(t)\cdot e^{i\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad u_0(p)=u(p-i\omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$u(p).$$

Аналогично, если отраженную от резонатора волну представить в виде $V_0(t)=V(t)\cdot e^{i\omega t}$, тогда изображение огибающей $V(t)$ имеет своим изображением функцию $v(p)$, а функция $V_0(t)$ будет иметь своим изображением функцию $v_0(p)=v(p-i\omega)$:

$$V_0(t)=V(t)\cdot e^{i\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad v_0(p)=v(p-i\omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$v(p).$$

Отраженная от резонатора волна при определенной частоте связана с падающей волной коэффициентом отражения, зависящим от $p=i\omega$ как

$$v_0(p)=\Gamma(p)\cdot u_0(p)=\Gamma(p)\cdot u(p-i\omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$V_0(t)=V(t)\cdot e^{i\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad v(p-i\omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$v(p).$$

Тогда для огибающей имеем $v(p-i\omega)=\Gamma(p)\cdot u(p-i\omega)$.

Так как при нахождении оригинала интегрирование ведется в бесконечных пределах, то, сделав замену переменных, получим

$$v(p) = \Gamma(p - i\omega) \cdot u(p). \tag{5.3}$$

Для одиночного резонатора, имеющего собственную частоту колебаний ω_0 и собственную добротность Q_0, связанного с подводящим волноводным трактом окном связи с коэффициентом связи β, коэффициент отражения $\Gamma(\omega)$ равен (5.2)

$$\Gamma(\omega) = \frac{\beta - [1 + 2iQ_0\delta_\omega]}{\beta + [1 + 2iQ_0\delta_\omega]},$$

где $\delta_\omega = \dfrac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ – относительная расстройка резонатора. Обозначая $p = i\omega$, запишем Г в виде

$$\Gamma(p) = -1 + \frac{2\beta}{\tau_0} \cdot \frac{1}{p - p_0}, \tag{5.4}$$

где $p_0 = i\omega_0 - 1/T_C$, $\quad T_C = \dfrac{\tau_0}{1+\beta}$ – нагруженное время,

$\tau_0 = \dfrac{2Q_0}{\omega_0}$ – собственное время затухания колебаний в резонаторе.

Тогда $\Gamma(p + i\omega) = -1 + \dfrac{2\beta}{\tau_0} \cdot \dfrac{1}{p - (p_0 - i\omega)}$. Здесь уже ω – частота задающего генератора. Из (5.3), пользуясь правилом свертки для оригиналов, получим уравнение для огибающей $V(t)$ отраженного от резонатора сигнала при известной форме огибающей, падающей на резонатор волны $U(t)$:

$$V(t) = -U(t) + \frac{2\beta}{\tau_0} \cdot \int_0^t U(t - \tau) \cdot e^{\tau(p_0 - i\omega)} d\tau. \tag{5.5}$$

Или делая замену переменных под интегралом с учетом выражения для p_0, имеем

$$V(t) = -U(t) + \frac{2\beta}{\tau_0} \cdot e^{-t/T_\omega} \int_0^t U(\tau) \cdot e^{\tau/T_\omega} d\tau, \tag{5.6}$$

где $T_\omega = \dfrac{\tau_0}{1 + \beta + i\tau_0(\omega - \omega_0)} = \dfrac{T_C}{1 + iT_C(\omega - \omega_0)} = \dfrac{T_C}{1 + i \cdot \delta}$,

$\delta = T_C \cdot (\omega - \omega_0)$.

Физически (5.6) означает, что отраженная волна $V(t)$ в общем случае представляет собой сумму двух волн: волны, отраженной от входа в резонатор $V_1(t) = -U(t)$ при полностью металлизированном окне связи и волны $V_2(t)$, излучаемой из резонатора и пропорциональной корню квадратному из энергии, запасенной в резонаторе к моменту времени t.

Типичный случай – падающая на резонатор волна имеет огибающую в виде ступеньки с единичной амплитудой $U(t)=1$ при $0 < t < t_1$ (рис. 5.4). В первый момент времени в резонаторе еще нет накопленной энергии и отраженная волна в точности равна падающей с противоположным знаком $V(0) = V_1(0) = -U(0) = -1$ (отражение от металлизированного окна связи).

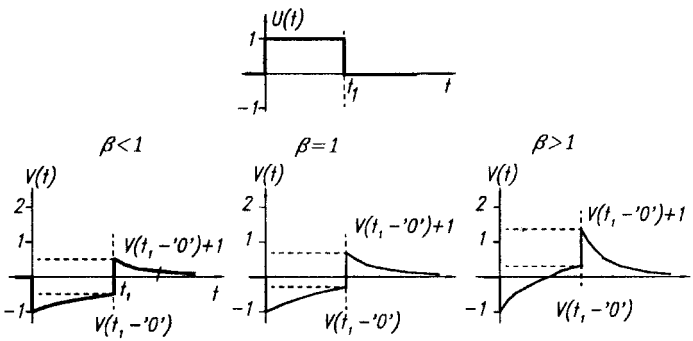


Рис. 5.4. Переходной процесс при подаче на резонатор сигнала ступенчатой формы с единичной амплитудой

По мере раскачки колебаний в резонаторе начинает появляться волна, излучаемая из резонатора $V_2(t)$. Причем при частоте ω, равной собственной частоте резонатора, ее фаза противоположна фазе отраженной волны от металлизированного окна связи, а амплитуда зависит от коэффициента связи β. При $t \to \infty$ система выходит на стационарный режим. При этом мощность падающей волны равна мощности отраженной волны плюс мощность потерь в резонаторе

$$P_{пад} = P_{отр} + P_{пот}. \qquad (5.7)$$

Мощность падающей волны $P_{пад}$ пропорциональна U^2.

Мощность отраженной волны $P_{отр}$ пропорциональна $V^2 = (-U + V_2)^2$.

Мощность потерь в резонаторе по определению коэффициента связи β равна $P_{пот} = P_{изл} / \beta$, где $P_{изл}$ – мощность излучаемой из резонатора вол-

ны, которая пропорциональна V_2^2. Из (5.7) имеем

$$U^2 = \left(-U + V_2\right)^2 + \frac{V_2^{\,2}}{\beta}. \qquad (5.8)$$

Откуда получим $$V_2 = U \cdot \frac{2}{1+1/\beta}\bigg|_{U=1} = \frac{2}{1+1/\beta}. \qquad (5.9)$$

При $\beta < 1$ отраженная волна V состоит в основном из волны $V_1 = -1$ (V_2 при $\beta \to 0$ стремится к 0), то есть отраженная волна в стационарном режиме имеет ту же фазу, что и при t=0, а ее амплитуда меньше 1. При β=1 амплитуда излученной из резонатора волны V_2 равна амплитуде падающей, а амплитуда отраженной волны равна нулю (режим согласованной нагрузки: вся подводимая мощность идет на возмещение потерь в стенках резонатора). При $\beta > 1$ амплитуда излученной волны V_2 становится больше амплитуды $V_1 = -1$ (в пределе при $\beta \to \infty$ $V_2 \to$ 2). Поэтому при $\beta > 1$ отраженная волна при выходе на стационарный режим меняет свою фазу на положительную. В пределе при $\beta >> 1$ амплитуда отраженной волны стремится к +1 при $t \to \infty$.

Если в момент времени t_1 выключить генератор, то амплитуда падающей волны скачком изменится с 1 до 0, а отраженная волна скачком изменит свою амплитуду на +1: $V(t)\big|_{t=t_1+'0'} = V(t)\big|_{t=t_1-'0'} + 1$ (см. рис. 5.4). Заметим, что в случае $\beta > 1$ мы уже будем иметь эффект "умножения мощности": амплитуда отраженной волны больше амплитуды падающей. Причем видно, что в пределе (при $t_1 \to \infty$ и $\beta >> 1$) амплитуда отраженной волны будет в два раза больше падающей, т.е. максимальный коэффициент умножения по мощности в пределе равен 4.

Если в момент времени t_1 произвести не просто выключение генератора, а изменить фазу падающей волны на 180° (см. рис. 5.5), то амплитуда падающей волны скачком изменяется с +1 на -1. Это приведет к тому, что отраженная волна скачком изменит свою амплитуду на +2: $V(t)\big|_{t=t_1+'0'} = V(t)\big|_{t=t_1-'0'} + 2$. Видно, что при любом β амплитуда отраженной волны после изменения фазы скачком на 180^0 больше, чем амплитуда падающей. Причем при $\beta >> 1$ в пределе (при $t_1 \to \infty$) амплитуда отраженной волны будет в три раза больше падающей, т. е. максимальный коэффициент умножения такой системы по мощности в пределе равен 9. Если далее в момент времени t=t_2 выключить генератор, то очевидно, что амплитуда полной отраженной волны скачком изменится при t=t_2 на -1: $V(t)\big|_{t=t_2+'0'} = V(t)\big|_{t=t_2-'0'} - 1$. После этого амплитуда отраженной волны

будет уменьшаться до нуля, пока вся мощность, запасенная в резонаторе, не исчезнет за счет потерь в стенках резонатора и излучения в подводящий волновод через отверстие связи.

Все вышесказанное математически описывается уравнением (5.6).

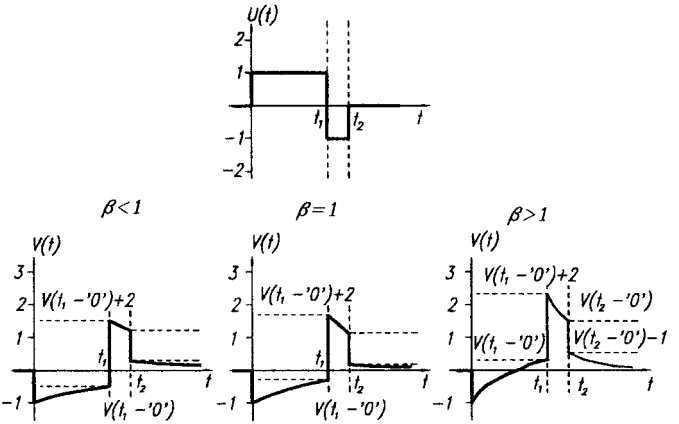


Рис. 5.5. Переходной процесс в резонаторе при перевороте фазы на 180°

Если падающая волна имеет классическую форму (рис. 5.5), т. е.

$$U(t)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<0\\ U_1 & \text{при} \quad 0<t<t_1\\ U_2 & \text{при} \quad t_1<t<t_2\\ 0 & \text{при} \quad t_2<t,\end{cases}$$

ее можно записать как

$$U(t)=U_1\cdot\sigma(t)+(U_2-U_1)\cdot\sigma(t-t_1)-U_2\cdot\sigma(t-t_2), \tag{5.10}$$

где $\sigma(t-t_x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<t_x\\ 1 & \text{при} \quad t\ge t_x\end{cases}$ – ступенчатая σ-функция.

При амплитуде падающей волны $\tilde{u}=\sigma(t-t_x)$ амплитуда отраженной волны, согласно (5.6), равна

$$\begin{aligned}\tilde{v}(t)&=-\sigma(t-t_x)+\frac{2\beta}{\tau_0}e^{-t/T_\omega}\int_0^t\sigma(t-t_x)e^{\tau/T_\omega}d\tau=\\ &=\sigma(t-t_x)\cdot\left[B_\omega-A_\omega e^{-(t-t_x)/T_\omega}\right],\end{aligned} \tag{5.11}$$

где $A_\omega=A\cdot\dfrac{1}{1+i\cdot\delta}$, $B_\omega=-1+A_\omega=\dfrac{B-i\cdot\delta}{1+i\cdot\delta}$,

$$A = \frac{2\beta}{1+\beta}, \qquad B = \frac{\beta-1}{\beta+1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V(t) &= U_1 \cdot \sigma(t) \cdot \left[B_\omega - A_\omega e^{-t/T_\omega}\right] + \\ &+ (U_2 - U_1) \cdot \sigma(t-t_1) \cdot \left[B_\omega - A_\omega e^{-(t-t_1)/T_\omega}\right] - \\ &- U_2 \cdot \sigma(t-t_2) \cdot \left[B_\omega - A_\omega e^{-(t-t_2)/T_\omega}\right]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Рассмотрим идеальный случай, когда

$U_1 = 1,\ U_2 = -1,\ \omega = \omega_0$:

Обл. I: $0 < t < t_1$ $\qquad V^I(t) = B - A \cdot e^{-t/T_C}, \qquad A = \frac{2\beta}{1+\beta}, \quad B = \frac{\beta-1}{\beta+1};$

Обл. II: $t_1 < t < t_2$ $\qquad V^{II}(t) = -B + C \cdot e^{-(t-t_1)/T_C}, \qquad C = A \cdot \left(2 - e^{-t_1/T_C}\right);$

Обл. III: $t_2 < t$ $\qquad V^{III}(t) = D \cdot e^{-(t-t_2)/T_C}, \qquad D = C \cdot e^{-(t-t_2)/T_C}.$

Можно проверить, что действительно, как было показано ранее,

$V(0) \equiv V^I(0) = -1,$

$V(t_1 + '0') \equiv V^{II}(t_1) = V^I(t_1) + 2 \equiv V(t_1 - '0') + 2,$

$V(t_2 + '0') \equiv V^{III}(t_2) = V^{II}(t_2) - 1 \equiv V(t_2 - '0') - 1,$

а коэффициент умножения системы по напряжению равен

$$K_0 = V(t_1 + '0') \equiv V^{II}(t_1) = -B + C = \frac{3\beta+1}{\beta+1} - \frac{2\beta}{\beta+1} \cdot e^{-t_1/T_C} \tag{5.13}$$

при $t_1 \to \infty$ $K_0 = \frac{3\beta+1}{\beta+1}$ и $\beta \to \infty$ $K_0 = 3$.

Система умножения мощности SLED

Система умножения мощности SLED (SLAC Energy Development) в настоящее время широко используется при создании линейных ускорителей с большим темпом ускорения. Она состоит из волноводного щелевого моста и двух высокодобротных резонаторов (см. рис. 5.6). Резонаторы служат для накопления ВЧ-мощности. Волноводный мост необходим для направления отраженных от резонаторов волн к нагрузке (например, к ускоряющей секции).

Волноводный мост представляет собой направленный ответвитель 1-го рода. В стационарном режиме амплитуды отраженных от него волн

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ связаны с амплитудами падающих волн $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ матрицей рассеяния S:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = S \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}. \qquad (5.14)$$

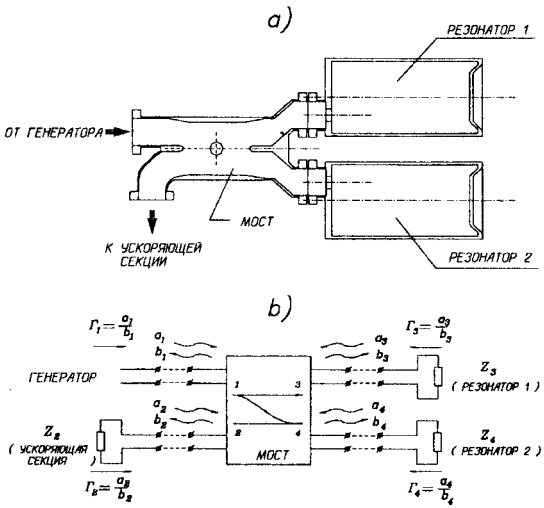


Рис. 5.6. Система умножения мощности SLED:
a) состав системы умножения мощности,
b) ее эквивалентная схема.

Кроме того, при известных коэффициентах отражения Γ_2, Γ_3 и Γ_4 имеем

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}. \qquad (5.15)$$

Решая совместно (5.14) и (5.15), можно выразить все амплитуды волн через амплитуду падающей волны a_1:

$$b_1 = \frac{a_1}{2} \cdot \frac{\Gamma_3 - \Gamma_4 - 2\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4}{1 + \frac{\Gamma_2}{2}(\Gamma_3 - \Gamma_4)}, \qquad a_1 \text{ - задано}, \qquad (5.16)$$

$$b_2 = -\frac{i \cdot a_1}{2} \cdot \frac{\Gamma_3 + \Gamma_4}{1 + \frac{\Gamma_2}{2}(\Gamma_3 - \Gamma_4)}, \qquad a_2 = b_2 \cdot \Gamma_2 ,$$

$$b_3 = \frac{a_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \Gamma_2 \Gamma_4}{1 + \frac{\Gamma_2}{2}(\Gamma_3 - \Gamma_4)}, \qquad a_3 = b_3 \cdot \Gamma_3 ,$$

$$b_4 = -\frac{i \cdot a_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \Gamma_2 \Gamma_4}{1 + \frac{\Gamma_2}{2}(\Gamma_3 - \Gamma_4)}, \qquad a_4 = b_4 \cdot \Gamma_4 .$$

$\Gamma_3(\omega)$ и $\Gamma_4(\omega)$ – коэффициенты отражения от резонаторов, зависящие от частоты ω, а $\Gamma_2 = |\Gamma_2| \cdot e^{i\varphi_2}$ – коэффициент отражения от ускоряющей структуры в силу широкополосности УС по отношению к резонаторам умножителя мощности, можно считать независящими от частоты.

В идеальном случае Γ_2=0 (УС идеально согласована с подводящим волноводным трактом), а Γ_3=Γ_4=Γ_0 (т. е. резонаторы одинаковы) получим

$$b_1 = 0 , \qquad a_1 \text{ - задано},$$

$$b_2 = -i \cdot a_1 \cdot \Gamma_0 , \quad a_2 = 0 ,$$

$$b_3 = \frac{a_1}{\sqrt{2}} , \qquad a_3 = \frac{a_1}{\sqrt{2}} \cdot \Gamma_0 ,$$

$$b_4 = -\frac{i \cdot a_1}{\sqrt{2}} , \qquad a_4 = -\frac{i \cdot a_1}{\sqrt{2}} \cdot \Gamma_0 . \qquad (5.17)$$

Отраженная в генератор волна отсутствует, а в УС поступает волна с амплитудой, равной амплитуде отраженной волны в случае одного резонатора. Поэтому процесс умножения в системе SLED в этом случае полностью совпадает с переходным процессом, происходящим в одиночном резонаторе. А волноводный мост необходим для направления отраженных от резонаторов волн к нагрузке (например, к ускоряющей секции).

Приведенные выше формулы позволяют рассмотреть процессы, происходящие в системе умножения мощности, когда резонаторы имеют различные параметры (например, различные собственные частоты), или работу системы на неидеально согласованную нагрузку, или если происходит уход резонансных частот резонаторов от рабочей частоты (например, при колебаниях температуры) и т. д.

При использовании системы SLED в УС поступает волна с амплитудой

$$V(t) = -B + C \cdot e^{-t/T_C} , \qquad (5.18)$$

где $C = A \cdot \left(2 - e^{-t_1/T_C}\right)$, $A = \frac{2\beta}{1+\beta}$, $B = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$, $T_c = \frac{\tau_{0A}}{\beta + 1}$, $\tau_{0A} = \frac{2Q_{0A}}{\omega}$.

Здесь время t для удобства отсчитывается от момента переворота фазы на 180^0. Тогда, при мощности задающего генератора P_0, мощность, поступающая на вход УС равна $P(t) = P_0 \cdot V(t)^2$. Распределение амплитуды ускоряющего электрического поля вдоль УС с постоянным импедансом

$$E(z,t) = E_0\left(t - \frac{z}{v_{\text{гр}}}\right)e^{-az}, \qquad (5.19)$$

где $E_0(t) = E(0,t)$ – амплитуда электрического поля на входе в УС при z=0. Так как $E_0(t) = \sqrt{2\alpha R_{sh} P(t)}$, то, зная зависимость мощности $P(t)$, можно найти распределение $E(z,t)$ в различных точках УС в разное время:

$$E(z,t) = E_0 \cdot \{C \cdot \exp\left[-(t - z/v_{\text{гр}})/T_c - \alpha z\right] - B \cdot \exp(-\alpha z)\}, \qquad (5.20)$$

где $E_0 = \sqrt{2\alpha R_{sh} P_0}$.

В первый момент времени t = 0 амплитуда ускоряющего поля на входе в УС максимальна, а в остальной части УС поле отсутствует. Распространяясь вдоль УС с групповой скоростью $v_{\text{гр}}$, волна затухает. К моменту времени t передний фронт волны, пройдя расстояние $z = t/v_{\text{гр}}$, уменьшит свою амплитуду на $\exp(-\alpha z)$. На входе УС поле в этот момент времени будет иметь также уменьшенную амплитуду, соответствующую амплитуде из системы умножения мощности в момент времени t. Если время заполнения УС T_f меньше длительности рабочей части импульса SLED $t_s = t_2 - t_1$, то при $t > t_s$ на вход УС перестает поступать мощность, а задний фронт поля в УС продолжает движение к концу УС со скоростью $v_{\text{гр}}$. На рисунке 5.7 показаны характерные распределения электрических полей в УС для различных времен t.

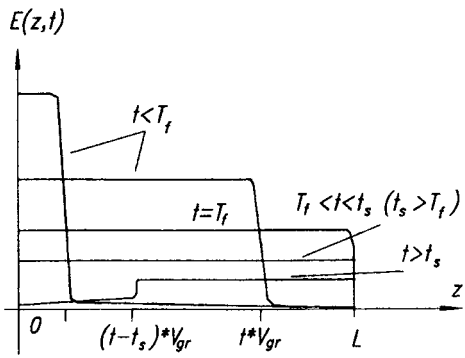


Рис. 5.7. Распределение амплитуды ускоряющего поля в зависимости от координаты z вдоль УС в различное время t после начала заполнения секции

Энергия, набираемая ускоряемой частицей, влетающей в УС в момент времени t, при условии $v_{гр} << c$ (т. е. частица "мгновенно" пролетает УС)

$$U(t) = \int_{L_1}^{L_2} E(z,t)dz\,, \tag{5.21}$$

где в соответствии с диаграммой заполнения секции (предполагая, что длительность рабочей части импульса умножителя t_s больше времени заполнения секции $t_s > T_f$):

$$L_1 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < t_s\,, \\ (t - t_s)\cdot v_{гр} & \text{при} \quad t > t_s\,. \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} t \cdot v_{гр} & \text{при} \quad t < T_f\,, \\ \mathrm{L} & \text{при} \quad t > T_f\,. \end{cases}$$

Для эффективного использования ускоряющей секции инжекция пучка (запуск электронной пушки) должен производиться после полного заполнения секции ВЧ-импульсом, т. е. через время $t=T_f$ после 180° переворота фазы на системе умножения мощности. Энергия, набираемая ускоряемой частицей, влетающей в УС при полном заполнении секции, равна

$$U = \int_0^L E(z,T_f)dz = U_0 \cdot \left\{ C \cdot e^{-T_f/T_C} \cdot \frac{\left[1 - e^{-(1-\tau_{0A}/T_C)\tau}\right]}{(1-\tau_{0A}/T_c)\cdot\left(1-e^{-\tau}\right)} - B \right\}, \tag{5.22}$$

где $U_0 = U_m \cdot \dfrac{1-\exp(-\tau)}{\sqrt{\tau}}$ – энергия, набираемая частицей без использования системы умножения мощности, $U_m = \sqrt{2P_0R_{sh}L}$. Можно потребовать, чтобы в момент времени $t = T_f$ амплитуды ускоряющего поля на входе и выходе УС были одинаковы (режим "квазиравномерного" распределения ускоряющего поля):

$$E(0,T_f) = E(L,T_f),$$
$$E(0,T_f) = E_0 \cdot \{C \cdot \exp(-T_f/T_c) - B\} = E_0 \cdot V(T_f),$$
$$E(L,T_f) = E_0 \cdot \{C - B\} \cdot \exp(-\alpha L) = E_0 \cdot V(0) \cdot \exp(-T_f/\tau_{0A}).$$

Тогда получим условие "квазиравномерности" поля:

$$V(T_f) = \exp(-T_f/\tau_{0A}) \cdot V(0) = \exp(-\alpha L) \cdot V(0). \tag{5.23}$$

Отсюда получим связь между параметрами УС и SLED в этом режиме:

$$\frac{\tau_{oA}}{T_c} = 1 - \frac{1}{\alpha L} \cdot \ln\left[1 + \frac{B}{C} \cdot \left(e^{\alpha L} - 1\right)\right]. \tag{5.24}$$

Из полученного выражения следует, что $\tau_{0A}/T_c \neq 1$. Набор энергии в сек-

ции при условии "квазиравномерности" распределения поля равен

$$U = U_0 \cdot \frac{\tau_{0A} / T_c}{1 - \tau_{0A} / T_c} \cdot B . \qquad (5.25)$$

Отсюда коэффициент увеличения энергии при использовании системы SLED:

$$M = \frac{U}{U_0} = \frac{\tau_{0A} / T_c}{1 - \tau_{0A} / T_c} \cdot B . \qquad (5.26)$$

КПД секции:

$$\eta = \frac{\int \frac{P(t = T_f, z)}{v_{gr}} dz}{P_0 \cdot (t_1 + T_f)} \cong \frac{\int_0^L P_0 \cdot V(T_f)^2 dz}{v_{\text{гр}} \cdot P_0 \cdot (t_1 + T_f)} = \frac{(C - B)^2 \cdot \exp(-2\alpha L)}{1 + t_1 / T_f} . \qquad (5.27)$$

Пример: В инжекционном комплексе ВЭПП-5 предполагается использовать ускоряющую структуру типа "круглый диафрагмированный волновод" с постоянным импедансом со следующими параметрами:

Рабочая частота	$f = 2856$ МГц,
Рабочий вид колебания	$\theta = 2\pi / 3$,
Волноводная добротность ускоряющей секции	$Q_{0A} = 1{,}32 \cdot 10^4$,
Групповая скорость	$v_{\text{гр}} = 0{,}021 \cdot c$,
Шунтовое сопротивление	$R_{sh} = 51$ МОм/м,
Постоянная времени ускоряющей структуры	$\tau_{0A} = 1{,}47$ мкс,
Коэффициент затухания в УС по полю	$\alpha = 0{,}108$ 1/м,
Длина ускоряющей секции	$L = 2{,}93$ м,
Параметр затухания	$\alpha L = 0{,}316$,
Время заполнения УС	$T_f = 0{,}471$ мкс,
КПД секции (без SLED)	$\eta = 74$ %,
Длительность импульса клистрона	$T_{kl} = 3{,}5$ мкс,
Собственная добротность резонаторов SLED с типом колебания H_{015}	$Q_0 = 1{,}05 \cdot 10^5$,
Собственное время затуханий в резонаторах	$\tau_0 \approx 11{,}7$ мкс,
Предельный коэффициент	$M_{\max} = 2{,}56$.

Для получения "квазиравномерного" распределения ускоряющего поля

получим $\beta \approx 4{,}95$ (отношение $\tau_{0A} / T_c = 0{,}72$). Коэффициент увеличения энергии при этом $M \approx 2$, а КПД секции будет $\eta = 37$ %.

Из анализа зависимостей коэффициента увеличения энергии $M(\beta)$, коэффициента неравномерности поля в УС $E(L)/E(0)$ и КПД структуры $\eta(\beta)$ от коэффициента связи β следует, что оптимальным для данной УС будет $\beta \approx 6 \div 8$. Для него $M \cong 2$, $(E(L) - E(0))/E(0) \cong 6{,}5$ %, $\eta \cong 40$ %.

Глава 6

УЧЕТ НАГРУЗКИ ТОКОМ

Учет нагрузки током в УС с бегущей волной (стационарный режим)

Ускоряемый пучок представляет собой цепочку эквидистантно расположенных сгустков. Излучаемое поле такого пучка в стационарном случае в силу интерференции должно иметь длину волны, равную расстоянию между сгустками, т. е. равную длине волны ускоряющего поля в волноводе. Следовательно, его частота и фазовая скорость будут равны частоте и фазовой скорости ускоряющей волны. То есть поле излучения стационарно относительно цепочки сгустков и перемещается вместе с ней. Такое поле излучения можно возбудить в силу линейности уравнений Максвелла только компонентой тока той же частоты. Для простоты будем рассматривать релятивистский пучок, т. е. при $\beta_\phi = 1$ и $\beta_e = 1$. Тогда ток можно считать неизменным.

Рассмотрим сначала только поле, индуцированное пучком. Поле от генератора можно потом просто добавить. Амплитуда поля излучения E_b определяется из уравнения баланса мощности с учетом того, что поле излучения находится в противофазе с возбуждающим его током.

$$\frac{dP_b}{dz} = -\frac{1}{2} \cdot J_1 E_b - 2\alpha P_b , \qquad (6.1)$$

где dP_b / dz – прирост мощности излучения на единице длины;

$2\alpha P_b$ – потери мощности излучения на единице длины из-за конечной проводимости материала изготовления УС;

J_1 – амплитуда тока 1-й гармоники электронного пучка, которая и ответственна за излучение волны того же типа, что и ускоряющая волна.

Амплитуда 1-й гармоники тока пучка определяется методами спектрального анализа.

Рассмотрим непрерывный пучок, состоящий из равномерно заряженных сгустков длиной 2ϕ, расположенных на расстоянии длины волны рабочей гармоники. То есть в любом сечении УС мы будем видеть эти отдельные сгустки, появляющиеся с рабочей частотой ω_0. Для такого пучка амплиту-

да 1-й гармоники тока $J_1 = 2 \cdot I_0 \cdot \frac{\sin\phi}{\phi}$, где $I_0 = \frac{\omega_0 q}{2\pi}$ – средний ток пучка в импульсе. При полностью непрерывном во времени пучке $\phi = \pi$ и $J_1 = 0$. Для точечных сгустков $\phi = 0$ и $J_1 = 2 \cdot I_0$. В дальнейшем для простоты будем рассматривать пучок из коротких (точечных) сгустков с зарядом q, расположенных эквидистантно на расстоянии длины волны ускоряющего поля. Т. е. длина сгустка считается много меньше длины волны в структуре. Для такого пучка уравнение баланса мощности запишется

$$\frac{dP_b}{dz} \approx -I_0 E_b - 2\alpha P_b . \tag{6.2}$$

Структура с постоянным импедансом

Для структуры с постоянным импедансом (CZ) $\alpha = const$. Зная, что $E_b^2 = 2\,\alpha\, R_{sh}\, P_b$, можно записать

$$\frac{dE_b}{dz} = -\alpha\, R_{sh} I_0 - \alpha\, E_b . \tag{6.3}$$

В случае постоянного тока (стационарный режим) решение этого уравнения

$$E_b(z) = -I_0 R_{sh} \cdot \left(1 - e^{-\alpha z}\right). \tag{6.4}$$

Зная распределение поля излучения вдоль структуры, можно найти энергию, которую недоберет пучок из-за излучения, пролетев всю структуру длиной L

$$U_b = \int_0^L E_b(z)\,dz = -I_0 R_{sh} L \left[1 - \frac{\left(1 - e^{-\tau}\right)}{\tau}\right], \tag{6.5}$$

где $\tau = \alpha L = T_f / \tau_{0A}$.

Структура с постоянным градиентом

Выше структурой с постоянным градиентом (CG) мы назвали структуру, у которой ускоряющее поле постоянно на всей длине структуры $E(z) = E_0 = const$. Это следовало из условия $\alpha(z) \cdot P(z) = const$, причем это равенство выполняется для ненагруженной пучком структуры. Исходя из этого была получена зависимость групповой скорости от координаты $v_{гр}(z)$ для такой структуры, то есть было получено условие изменения

геометрии периода структуры, выполнив которое можно иметь постоянное ускоряющее поле вдоль всей структуры. В такой структуре с уже заданной геометрией и будем рассматривать эффекты нагрузки током. Понятно, что при появлении дополнительной нагрузки изменится закон распределения мощности вдоль структуры и, соответственно, амплитуда ускоряющего поля начнет зависеть от координаты.

Для CG-структуры можно показать, что зависимость коэффициента затухания $\alpha(z)$ подчиняется уравнению $\frac{d\alpha}{dz} = 2\alpha^2$. Тогда из уравнения для излученной пучком мощности (6.2) получим

$$\frac{dE_b}{dz} = -I_0\,\alpha(z)\,R_{sh}\,. \tag{6.6}$$

В CG-структуре зависимость коэффициента затухания вдоль структуры есть

$$\alpha(z) = \frac{1}{\tau_{0A}\cdot v_{\text{гр}}(z)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-e^{-2\tau})/L}{[1-z\cdot(1-e^{-2\tau})/L]}\,. \tag{6.7}$$

Тогда распределение поля излучения вдоль CG-структуры в стационарном режиме равно

$$E_b(z) = \frac{I_0 R_{sh}}{2}\cdot\ln\left[1-\frac{z}{L}\cdot\left(1-e^{-2\tau}\right)\right]. \tag{6.8}$$

Энергия, которую недоберет пучок из-за излучения:

$$U_b = -I_0 R_{sh} L\left[\frac{1}{2}-\frac{\tau\cdot e^{-2\tau}}{1-e^{-2\tau}}\right],\quad \text{здесь } \tau = \int_0^L \alpha(z)\,dz\,. \tag{6.9}$$

В общем случае, когда в структуре есть поле генератора, сдвинутое по фазе относительно тока на постоянный угол Θ, полная энергия, набираемая пучком в УС, есть

$$U = U_0\cdot\cos\Theta - m\cdot I_0\,, \tag{6.10}$$

где U_0 – энергия, набираемая в структуре без учета поля излучения при $\Theta = 0$.

Для CZ-структуры $U_0 = U_m\cdot\frac{1-e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}}$, $\quad m = R_{sh}L\left[1-\frac{\left(1-e^{-\tau}\right)}{\tau}\right]$,

$\tau = \alpha L$.

Для CG-структуры $U_0 = U_m\cdot\sqrt{\frac{1-e^{-2\cdot\tau}}{2}}$, $\quad m = R_{sh}L\left[\frac{1}{2}-\frac{\tau\cdot e^{-2\tau}}{1-e^{-2\tau}}\right]$,

$\tau = \int\limits_0^L \alpha(z)dz$, где для обеих структур $U_m = \sqrt{2P_0 R_{sh} L}$.

КПД ускорителя

При $\Theta = 0$ для обеих структур энергия, набираемая пучком, равна $U = U_0 - m \cdot I_0$. Мощность, переданная ВЧ-системой пучку (которая пошла на ускорение пучка) – $P_П = U \cdot I_0$. Отношение мощности, переданной ВЧ-системой пучку $P_П$, к мощности питания P_0 называют коэффициентом полезного действия ускорителя $\tilde{\eta}$. Иногда его называют эффективностью преобразования мощности ускоряющей структуры:

$$\tilde{\eta} = \frac{P_П}{P_0} = \frac{U \cdot I_0}{P_0} = \frac{U_0 \cdot I_0 - m \cdot I_0^2}{P_0}. \qquad (6.11)$$

Видно, что максимум этого выражения достигается при токе $I_0 = U_0 / 2m$, то есть тогда, когда энергия пучка уменьшается (из-за наличия тока) на ½ его ненагруженной величины

$$U_{max} = U_0 - m \cdot \frac{U_0}{2m} = \frac{U_0}{2}. \qquad (6.12)$$

Максимальное значение $$\tilde{\eta}_{max} = \frac{U_0^2}{4mP_0}. \qquad (6.13)$$

U_0 и m зависят от постоянной затухания структуры τ. Можно показать, что при малых τ для CZ- и CG-структур $\tilde{\eta}_{max} \approx 1 - 2\tau/3$. В таблице приведены $\tilde{\eta}_{max}$ для CZ- и CG- структур для различных значениях τ:

	$\tau = 1$	$\tau = 0.5$	$\tau \to 0$
CZ-структура	54 %	76 %	$\approx 1 - 2\tau/3$
CG-структура	63 %	73 %	$\approx 1 - 2\tau/3$

Зная амплитуду поля на конце УС E_L, можно написать выражение для мощности, уходящей в нагрузку P_L, а также мощность, которая рассеивается в структуре в виде тепла P_S. Например, для CZ-структуры:

поле в конце структуры $E_L = E_0 \cdot e^{-\tau} - I_0 R_{sh} \cdot \left(1 - e^{-\tau}\right)$,

мощность, уходящая в нагрузку, $P_L = \dfrac{E_L^2 \cdot L}{2R_{sh}\tau}$,

мощность, рассеиваемая в структуре в виде тепла, $$P_S = P_0 - P_L - I_0 \cdot V . \qquad (6.14)$$

В CZ-структуре распределение электрического поля вдоль структуры, когда сгусток находится на вершине бегущей волны

$$E(z) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} - I_0 R_{sh} \cdot \left(1 - e^{-\alpha z}\right), \qquad (6.15)$$

где $E_0 = \sqrt{2\alpha R_{sh} P_0}$, а P_0 – мощность на входе в УС. Это же поле и ускоряет пучок. Видно, что при заданном поле пучка I_0 существует координата z^*, при которой поле $E(z^*) = 0$. То есть при $z = z^*$ вся энергия генератора будет израсходована, а при $z > z^*$ будет происходить процесс генерирования пучком ВЧ-энергии в УС. Наоборот, при заданной длине ускорителя l существует максимальный ток пучка $I_{0\,max}$, превышение которого приведет к началу генерации энергии из пучка, и пучок начнет недобирать энергии после пролета всей структуры. Из условия $E(l) = 0$ найдем максимальное значение тока пучка $I_{0\,max}$ при заданной длине структуры l :

$$I_{0\,max} = \sqrt{\frac{2\alpha P_0}{R_{sh}}} \cdot \frac{e^{-\alpha l}}{1 - e^{-\alpha l}} . \qquad (6.16)$$

Пучок наберет энергию в таком ускорителе

$$V\Big|_{I_0 = I_{0\,max}} = \sqrt{\frac{2 P_0 R_{sh}}{\alpha}} \cdot \left[1 - \frac{\tau \cdot e^{-\tau}}{1 - e^{-\tau}}\right], \qquad (6.17)$$

где $\tau = \alpha \cdot l$.

Коэффициент полезного действия $\tilde{\eta}$ такой структуры равен

$$\tilde{\eta} = 2 \cdot \frac{e^{-\tau} \cdot \left[1 - e^{-\tau} - \tau \cdot e^{-\tau}\right]}{\left[1 - e^{-\tau}\right]^2} . \qquad (6.18)$$

Выбор типа структуры (CZ или CG) для конкретного ускорителя всегда индивидуален. CZ- структура проще в исполнении (постоянная геометрия ячеек). В CG-структуре оказывается подавленным возбуждение паразитных гибридных HEM-волн, наличие которых приводит к так называемому эффекту обрыва тока. Поэтому в основном CZ-структуры используют при малых ускоряемых токах, а CG – при больших.

Фундаментальная теорема о нагрузке током для резонатора

Основной вопрос разработчиков источников ВЧ-мощности: какую энергию излучит заряд q, пролетев резонатор или замедляющую систему, какое напряжение будет наведено в резонаторе после пролета заряженного сгустка. Для разработчиков ускорителей электрическое поле, наведенное сгустком после пролета резонатора или замедляющей системы, приводит к "подсадке" ускоряющего поля от генератора. То есть частица, двигаясь в ускоряющем поле от ВЧ-генератора и в собственном поле излучения, недобирает энергии. Движение в собственном поле излучения приводит и к другим эффектам в ускорителе.

Существует несколько способов нахождения наведенного напряжения в резонаторе после пролета через него заряда. Рассмотрим один из них. Через резонатор пролетает точечный заряд q, его размеры много меньше длины волны, возбуждаемой в резонаторе моды. Так как электрические поля, действующие на заряженную частицу со стороны генератора и собственного поля излучения, аддитивны, то можно рассмотреть отдельно собственное поле излучения сгустка, а затем просто сложить его с полем генератора для изучения действия полного электрического поля на частицу.

Пусть перед пролетом заряда через резонатор в нем не было запасенной энергии. После пролета частицы в резонаторе появится наведенное напряжение V_b. Энергия, запасенная в резонаторе, пропорциональна квадрату напряжения $W = \alpha \cdot V_b^2$. Так как других полей, кроме наведенного самой частицей, в резонаторе нет, то частица будет взаимодействовать с какой-то частью наведенного напряжения V_b.

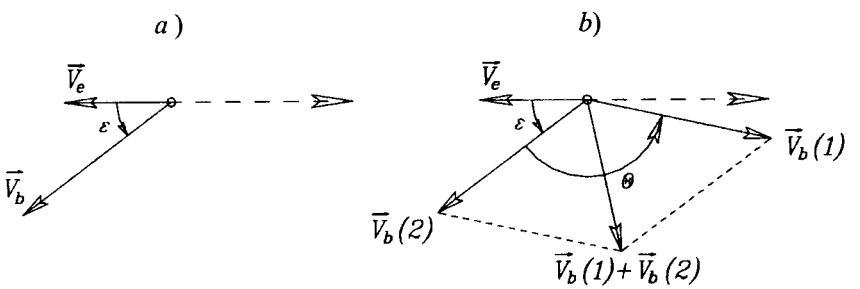


Рис. 6.1. Диаграмма напряжений в резонаторе:
a) после первого пролета заряда q,
b) после второго пролета.

Пусть на частицу действует (т. е. ее тормозит) напряжение $V_e = f \cdot V_b$. То есть напряжение V_e – это то напряжение, которое "увидит" частица, пролетев резонатор. Причем оно может быть не в фазе с наведенным напряжением V_b, а быть сдвинутым по фазе на угол ε (рис. 6.1, *а*). Пусть после первого пролета заряд возвратится ко входу в резонатор без потери энергии (например, с помощью постоянного магнитного поля) так, что его фаза второго пролета через резонатор определяется временем нахождения заряда вне резонатора (*n* полных периодов колебания в резонаторе плюс остаточное время θ / ω_0, где θ – пролетный угол, ω_0 – резонансная частота возбуждаемой моды). Считаем, что потери в резонаторе малы, то есть напряжение, наведенное в резонаторе после первого пролета частицы, $V_b(1)$ не изменится по амплитуде, а только повернется на дополнительный угол θ (рис. 6.1, *b*). После второго пролета резонатора заряд также наведет в нем напряжение $V_b(2)$, равное по амплитуде $V_b(1)$. Полная энергия, запасенная в резонаторе после двух пролетов:

$$W = \alpha \cdot \left|\vec{V}_b(1) + \vec{V}_b(2)\right|^2 = \alpha \cdot \left[2V_b \cos\frac{\theta}{2}\right]^2 = 2\alpha V_b^2 \left(1 + \cos\theta\right). \qquad (6.19)$$

С другой стороны, потери энергии заряда за два пролета равны

$$\Delta U = qV_e + \left[qV_e + qV_b \cos\left(\varepsilon + \theta\right)\right]. \qquad (6.20)$$

Приравнивая запасенную энергию в резонаторе к потерям энергии заряда и полагая $V_e = f \cdot V_b$, получим

$$2\left(q \cdot f - \alpha \cdot V_b\right) + \left(q \cdot \cos\varepsilon - 2 \cdot \alpha \cdot V_b\right) \cdot \cos\theta - \left(q \cdot \sin\varepsilon\right) \cdot \sin\theta = 0. \qquad (6.21)$$

Так как θ в нашем рассмотрении может быть любым, то

$$\sin\varepsilon = 0,$$

$$V_b = \frac{q}{2\alpha},$$

$$f = \frac{\alpha V_b}{q} = \frac{1}{2}. \qquad (6.22)$$

Сделаем следующие выводы.

1. Наведенное в резонаторе напряжение находится в такой фазе, чтобы быть максимально против движения индуцирующего заряда – угол $\varepsilon = 0$.
2. Амплитуда поля излучения, наведенного в резонаторе после пролета заряженной частицей с зарядом q, равна

$$V_b = \frac{q}{2\alpha} = 2 \cdot k \cdot q, \qquad (6.23)$$

где $k = \dfrac{1}{4\alpha}$ – параметр потерь, или коэффициент, связывающий наведенное напряжение на резонаторе V_b с зарядом q (размерность параметра потерь – $[k] = \dfrac{вольт}{кулон}$). Причем каждая резонансная мода имеет свой параметр потерь.

3. Заряд "видит" точно половину наведенного им же поля излучения:

$$V_e = \frac{1}{2} \cdot V_b = k \cdot q \,. \tag{6.24}$$

4. Энергия, остающаяся в резонаторе после пролета заряда q, есть

$$W = \alpha \cdot V_b^2 = \frac{q^2}{4 \cdot \alpha} \equiv k \cdot q^2 \,, \tag{6.25}$$

причем в резонаторе, где до этого не было других полей.

Если в резонаторе было какое-то напряжение до пролета V_g (например от внешнего генератора), то по принципу суперпозиции на заряженную частицу будет действовать суммарное ускоряющее поле (см. рис. 6.2)

$$V_A = V_S \cdot \cos\Phi_S = V_g \cdot \cos\Theta_g - k \cdot q \,. \tag{6.26}$$

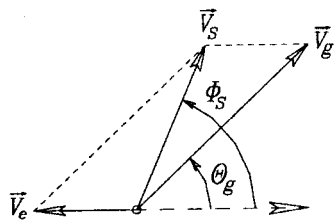


Рис. 6.2. Диаграмма сложения поля излучения и поля генератора

Как выразить параметр потерь через характеристики резонатора? $k = \dfrac{1}{4\alpha} = \dfrac{V_b^2}{4W}$. Существует множество программ расчета характеристик резонаторов: LALA, SUPERFISH, SUPERLANS и другие, которые рассчитывают величину $\dfrac{V_{an}^2}{\omega_n W_n} = \left(\dfrac{R_a}{Q}\right)_n$ для каждой n-й резонансной моды. Здесь R_a и Q - шунтовое сопротивление и добротность резонатора для n-й моды с частотой ω_n, V_{an} - напряжение для n-й моды, W_n - запасенная в моде энергия. Отсюда можно рассчитать параметр потерь для этой моды

$$k = \frac{\omega}{4} \cdot \frac{R_a}{Q}. \tag{6.27}$$

Если сгустки не коротки по сравнению с длиной волны, то это можно учесть, вводя фактор F: Заряд q наводит в резонаторе напряжение V_0. Тогда элементарный заряд dq наведет в нем напряжение $dV = V_0 \cdot (dq/q)$. Если dq влетает в резонатор в момент времени t_0, то

$$d\widetilde{V} = \frac{V_0}{q} \cdot e^{j\omega_0(t-t_0)} dq(t_0). \tag{6.28}$$

Для Гауссового распределения заряда

$$dq(t_0) = I(t_0)dt_0 = \frac{q}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \cdot e^{-\frac{t_0^2}{2\sigma_t^2}} dt_0. \tag{6.29}$$

Тогда

$$d\widetilde{V}(t,t_0) = \frac{V_0}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-\frac{t_0^2}{\sigma_t^2}} \cdot (\cos\ \omega_0 t_0 - j\sin\ \omega_0 t_0) dt_0. \tag{6.30}$$

Откуда после интегрирования по t_0 получим

$$\widetilde{V}(t) = V_0 \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-\frac{\omega_0^2\sigma_t^2}{2}}, \tag{6.31}$$

то есть полное наводимое напряжение $\widetilde{V}(t)$ есть $V_0 \cdot e^{j\omega_0 t}$ - напряжение, наводимое в резонаторе точечным зарядом, уменьшенное на фактор

$$F_G = e^{-\frac{1}{2}\omega_0^2\sigma_t^2}, \tag{6.32}$$

учитывающий в данном случае гауссовское распределение заряда в сгустке.

Для однородно заряженного сгустка длиной t_b фактор

$$F = \frac{\sin(\omega_0 t_b/2)}{\omega_0 t_b/2}. \tag{6.33}$$

При скорости сгустка, пролетающего резонатор, равной c его линейные разметы связаны с временной протяженностью как $\sigma_z = c \cdot \sigma_t$ или $l_b = c \cdot t_b$.

<u>*Пример*</u>: Фактор $F = 0{,}9$ соответствует размеру гауссовского сгустка $\sigma_z/\lambda = 0{,}073$, а равномерно зараженного $l_b/\lambda = 0{,}25$.

Учет нагрузки током в УС с бегущей волной (нестационарный режим)

В предыдущей главе было рассмотрено возбуждение УС с учетом нагрузки током в стационарном случае, когда ток ускоряемых частиц считался постоянным $I_0(z,t) = I_0 = const$. Причем рассматривался пучок, состоящий из точечных сгустков с зарядом q, расположенных эквидистантно на расстоянии длины волны ускоряющего поля. Из уравнения баланса мощности было получено выражение для амплитуды поля излучения с учетом только 1-й гармоники тока пучка.

Рассмотрим нестационарный случай, когда в УС ускоряется короткий цуг тока, состоящий так же из эквидистантных точечных зарядов с зарядом q каждый, но имеющий конечную длину. С учетом поля генератора, считая, что фаза между полем генератора и полем излучения равна нулю, уравнение для полного поля в УС запишется

$$\frac{dE}{dz} = -\alpha(z)\cdot R_{sh}\cdot I_0(t) - \alpha(z)\cdot E\,, \tag{6.34}$$

где R_{sh} – шунтовое сопротивление структуры (считается постоянным),

$\alpha(z) = \dfrac{1}{\tau_{0A}\cdot v_{\text{гр}}(z)}$ – изменение коэффициента затухания в УС по полю вдоль структуры,

$\tau_{0A} = \dfrac{2Q_{0A}}{\omega}$ – постоянная времени ускоряющей структуры,

$v_{\text{гр}}(z)$ – изменение групповой скорости вдоль УС,

$I_0(t) = \dfrac{\omega_0 q}{2\pi}\cdot i(t)$ – средний ток пучка, состоящего из эквидистантных точечных сгустков с зарядом q,

$i(t)$ – безразмерная функция, описывающая изменение среднего тока вдоль пучка.

То есть уравнение (6.34) также учитывает только поля излучения в приближения только 1-й гармоники тока пучка с частотой ω_0. Запишем уравнение для полного поля в УС (6.34) в частных производных:

$$v_{\text{гр}}\cdot\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial E}{\partial t} + E\cdot\left[\frac{1}{\tau_{0A}} + \frac{R_{sh}}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_{\text{гр}}}{R_{sh}}\right)\right] = -I_0(z)\cdot\frac{R_{sh}}{\tau_{0A}}\,. \tag{6.35}$$

Полное поле можно представить как сумму поля генератора и поля излучения:

$$E(z,t) = E_g(z,t) + E_b(z,t). \tag{6.36}$$

Далее будем рассматривать только структуру с постоянным импедансом (CZ).

При I_0=0 имеем в структуре только поле генератора. Решение уравнения при I_0=0 было получено ранее:

$$E_g(z,t) = E_0\left(t - \frac{z}{v_{\text{гр}}}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau_{0A}} \cdot \frac{z}{v_{\text{гр}}}\right), \tag{6.37}$$

где $E_0(t) = E_0(0,t)$ - поле на входе в секцию в момент времени t.

Если в момент времени τ инжектировать частицу со скоростью $v_e = c$, то в момент времени $t = \tau + t'$ она будет находиться на расстоянии $z = c\,t'$ от начала секции, а поле в этой точке будет равно

$$E_g(z,\tau) = E_0\left(\tau + \frac{z}{c} - \frac{z}{v_{\text{гр}}}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau_{0A}} \cdot \frac{z}{v_{\text{гр}}}\right). \tag{6.38}$$

Потенциал (или энергия), который наберет частица, влетевшая в момент времени τ и пролетевшая секцию длиной L:

$$U_g(\tau) = \int_0^L E_g(z,\tau)\,dz = \int_0^L E_0\left(-\frac{z}{v_{\text{гр}}} \cdot (1 - \beta_{\text{гр}}) + \tau\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau_{0A}} \cdot \frac{z}{v_{\text{гр}}}\right) dz. \tag{6.39}$$

Если $E_0(t)$ – ступенчатая функция $E_0(t) = E_0 \cdot \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ E_0 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$, то интеграл будет отличен от нуля при

$$-\frac{z}{v_{\text{гр}}} \cdot (1 - \beta_{\text{гр}}) + \tau \geq 0 \quad \Rightarrow \quad z \leq \left.\frac{\tau \cdot v_{\text{гр}}}{(1 - \beta_{\text{гр}})}\right|_{\beta_{\text{гр}} << 1} \approx \tau \cdot v_{\text{гр}}.$$

То есть частицы будут набирать энергию только в той части УС, где есть ВЧ-поле, которое распространяется по структуре с конечной групповой скоростью $v_{\text{гр}}$. Тогда

$$U_g(\tau) = E_0 \cdot \int_0^{\tau v_{\text{гр}}} \exp\left(-\frac{1}{\tau_{0A}} \cdot \frac{z}{v_{\text{гр}}}\right) dz = E_0 \cdot \tau_{0A} v_{\text{гр}} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0A}}\right)\right). \tag{6.40}$$

После полного заполнения УС ВЧ-полем все последующие частицы будут набирать одинаковую энергию, двигаясь в полностью заполненной структуре. То есть

$$U_g(\tau)=\begin{cases} U_m\cdot\dfrac{1-exp(-\tau/\tau_{0A})}{1-exp(-T_f/\tau_{0A})} & \text{при } \tau<T_f \\ U_m & \text{при } \tau\geq T_f \end{cases}, \qquad (6.41)$$

где $U_m = E_0 L\cdot\eta^{1/2}$ и соответствует набору энергии в стационарном режиме. Здесь η – КПД ускоряющей структуры:

$$\eta=\left(\frac{1-exp(-T_f/\tau_{0A})}{T_f/\tau_{0A}}\right)^2. \qquad (6.42)$$

Поле излучения E_b при $I_0\neq 0$ можно найти как частное решение уравнения (6.34). Прямой подстановкой можно проверить, что

$$E_b(z,t)=-\frac{R_{sh}}{\tau_{0A}\cdot v_{\text{гр}}}\cdot\int_0^z I_0\left(z',t-\frac{z-z'}{v_{\text{гр}}}\right)\cdot\exp\left(-\frac{z-z'}{\tau_{0A}\cdot v_{\text{гр}}}\right)dz'. \qquad 6.43)$$

Пусть частица с зарядом q, двигающаяся со скоростью c влетает в структуру в момент времени $t=0$. Ток этой частицы на расстоянии z будет равен $I_0(z,t)=q\cdot c\cdot\delta(z-ct)$. Тогда она возбудит поле

$$E_b(z,t)=-\frac{R_{sh}\cdot q\cdot c}{\tau_{0A}\cdot v_{\text{гр}}}\cdot\int_0^z\delta\left(z'-c\cdot\left(t-\frac{z-z'}{v_{\text{гр}}}\right)\right)\cdot\exp\left(-\frac{z-z'}{\tau_{0A}\cdot v_{\text{гр}}}\right)dz'. \qquad (6.44)$$

Из анализа аргумента дельта-функции и пределов интегрирования следует, что

$$E_b(z,t)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0<z<v_{\text{гр}}t, \\ -\dfrac{R_{sh}\cdot q\cdot c}{\tau_{0A}\cdot v_{\text{гр}}\cdot\left(\dfrac{c}{v_{\text{гр}}}-1\right)}\cdot\exp\left(-\dfrac{z-ct}{\tau_{0A}\cdot v_{\text{гр}}\cdot\left(\dfrac{c}{v_{\text{гр}}}-1\right)}\right) & \text{при } v_{\text{гр}}t<z<ct, \\ 0 & \text{при } L>z>ct. \end{cases}$$

(6.45)

Или при малой групповой скорости $v_{\text{гр}}<<c$

$$E_b(z,t)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0<z<v_{\text{гр}}t, \\ -\dfrac{R_{sh}\cdot q}{\tau_{0A}}\cdot\exp\left(-\dfrac{z/c-t}{\tau_{0A}}\right) & \text{при } v_{\text{гр}}t<z<ct, \\ 0 & \text{при } L>z>ct. \end{cases} \tag{6.46}$$

То есть излученного поля не может быть впереди частицы, двигающейся со скоростью света (при $z > ct$), а поле, излученное частицей при влете в секцию в момент времени $t = 0$, к моменту времени t, распространяясь со скоростью $v_{\text{гр}}$, уйдет от начала секции к точке $z = v_{\text{гр}}t$ и кроме того уменьшит свою амплитуду за счет потерь в стенках УС (см. рис. 6.3).

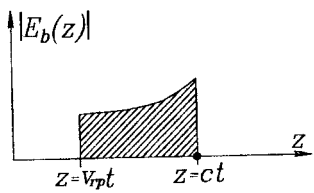


Рис. 6.3. Распределение поля излучения заряда q при пролете УС

Запишем выражение R_{sh} / τ_{0A} как

$$\frac{R_{sh}}{\tau_{0A}}=\frac{R_{sh}\omega_0}{2Q_{0A}}=2\cdot\frac{\omega_0}{4}\cdot\frac{R_{sh}}{Q_{0A}}=2k_0. \tag{6.47}$$

То есть поле излучения заряда q при пролете УС на бегущей волне (без учета затухания в структуре) есть

$$E_b=-2k_0q. \tag{6.48}$$

В периодической ускоряющей структуре с бегущей волной аналогично резонатору излученная волна после пролета заряженной частицы с зарядом dq имеет амплитуду $dE_b = -2k_0dq$. Также можно показать, что электрическое поле, в котором тормозится частица, есть $dE_e = -k_0dq$. Заметим, что здесь k_0 – параметр потерь – имеет размерность $[k_0]=\dfrac{\textit{вольт}}{\textit{кулон}\cdot\textit{метр}}$.

Знак минус в выражении (6.48) указывает, что излучаемое поле направлено против движения частицы, тормозит ее. Параметр потерь в структуре с бегущей волной для n-й моды выражается через характеристики ускоряющей структуры аналогичным образом:

$$k_n=\frac{\omega_n}{4}\cdot\left(\frac{R_{sh}}{Q}\right)_n=\frac{E_n^2}{4W_n}, \tag{6.49}$$

где R_{sh} и Q - шунтовое сопротивление и добротность структуры для n-й моды с частотой ω_n, E_n - амплитуда синхронной пространственной гармоники для n-й моды, а W_n - запасенная энергия на единицу длины, просуммированная по всем *пространственным* гармоникам этой моды.

Энергетический спектр

Если в момент времени $t = \tau$ влетит вторая частица, то к моменту времени $t = \tau + t'$ она будет находиться в точке $z = ct'$ и изменит свой потенциал, пролетев в поле излучения предыдущей частицы на

$$\delta U_b(\tau) = \int_0^L E_b(z,t)dz = -\frac{R_{sh}\cdot q}{\tau_{0A}} \int_{v_{\text{гр}}\cdot\tau}^{L} \exp\left(-\frac{z/c-(\tau-t')}{\tau_{0A}}\right)dz. \qquad (6.50)$$

Здесь конечный предел интегрирования равен L, так как вторая частица летит вслед за первой и пробудет в поле первой все время до пролета всей секции. Так как $z = c\,t'$, то получим, что потери 2-й частицы в поле 1-й равны

$$\delta U_b(\tau) = -\frac{R_{sh}\cdot q}{\tau_{0A}}\cdot L\cdot\left(1-\frac{\tau}{T_f}\right)\cdot\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0A}}\right) = F(\tau)\cdot q(0). \qquad (6.51)$$

Аргумент у заряда подчеркивает, что первая частица влетела в УС в момент времени $t = 0$. Множители в полученном выражении легко интерпретируются: $\exp\left(-\tau/\tau_{0A}\right)$ связан с затуханием поля излучения первой частицы из-за потерь в стенках УС, $\left(1-\tau/T_f\right)$ – с выходом поля излучения из секции за время τ.

Если первая частица влетает в момент времени $t = t'$, то частица, влетевшая в момент времени $t = \tau$ после самой первой, уменьшит потенциал частицы на

$$\delta U_b(\tau - t') = F(\tau - t')\cdot q(t'). \qquad (6.52)$$

Полное уменьшение потенциала частицы, влетевшей в момент времени τ после первой (т. е. после начала импульса тока), есть сумма уменьшения потенциала от всех впереди влетевших частиц:

$$\Delta U_b(\tau) = \int_0^\tau F(\tau-t')\,dq(t') = \int_0^\tau F(\tau-t')\cdot I_0(t')\,dt' = \int_0^\tau F(t')\cdot I_0(\tau-t')\,dt'. \qquad (6.53)$$

Для ступенчатого тока $I_0(t) = I_0\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ I_0 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$ уменьшение потенциала (или энергии) частицы, влетевшей в момент времени τ после первой частицы (т. е. после начала импульса тока), получим

$$\Delta U_b(\tau) = \begin{cases} \text{при } \tau < T_f \\ -R_{sh}L \cdot I_0 \cdot \left\{ \left(1 - \frac{\tau_{0A}}{T_f}\right) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0A}}\right)\right] + \frac{\tau}{T_f} \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0A}}\right) \right\}, \\ \text{при } \tau \geq T_f \\ -R_{sh}L \cdot I_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{\tau_{0A}}{T_f} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{T_f}{\tau_{0A}}\right)\right] \right\} \equiv -R_{sh}L \cdot I_0 \cdot \left(1 - \eta^{1/2}\right). \end{cases} \tag{6.54}$$

Решение при $\tau \geq T_f$ соответствует стационарному случаю. Полная энергия, набранная частицей с учетом поля генератора –

$$U_{tot}(\tau) = U_g(\tau) + \Delta U_b(\tau). \tag{6.55}$$

Для коротких сгустков с $\tau << T_f$ и $\tau << \tau_{0A}$ из выражения для $\Delta U_b(\tau)$ получим

$$\Delta U_b(\tau) \approx -R_{sh} \cdot L \cdot I_0 \left[\frac{\tau}{\tau_{0A}} - \frac{\tau_{0A}}{T_f} \cdot \left(\frac{\tau}{\tau_{0A}}\right)^2 \right]. \tag{6.56}$$

Пусть τ_b – длительность импульса тока. Сохранив в (6.56) только линейный член, запишем уменьшение потенциала частицы в виде

$$\Delta U_b(\tau) \approx -R_{sh} \cdot L \cdot I_0 \cdot \frac{\tau}{\tau_{0A}} = -R_{sh} \cdot L \cdot I_0 \cdot \frac{\tau_b}{\tau_{0A}} \cdot \frac{\tau}{\tau_b} = -\Delta U_{sb} \cdot \frac{\tau}{\tau_b}, \tag{6.57}$$

где ΔU_{sb} – максимальное значение уменьшения энергии в сгустке, вызванное полем излучения.

Рассмотрим сначала случай, когда пучок влетает в уже заполненную ВЧ-мощностью секцию:

$$U_g(\tau) \equiv U_m = E_0 \cdot L \cdot \eta^{1/2},$$

$$\Delta U_b(\tau) = -\Delta U_{sb} \cdot \frac{\tau}{\tau_b}, \tag{6.58}$$

где $\eta = \dfrac{1 - \exp(-2\alpha L)}{2\alpha L}$ – КПД CZ-структуры. Для короткого сгустка пол-

ная энергия, набранная частицей, –

$$U_{tot}(\tau) = U_m - \Delta U_b(\tau) = U_m \cdot \left(1 - \frac{\tau}{\tau_b} \cdot \frac{\Delta U_{sb}}{U_m}\right). \qquad (6.59)$$

Здесь и далее под $\Delta U_b(\tau)$ будем понимать абсолютное значение полученного выше выражения для изменения потенциала за счет полей излучения, чтобы подчеркнуть уменьшение общей энергии пучка по сравнению с энергией, полученной от генератора.

Из выражения следует, что частицы, летящие в начале цуга, после пролета секции наберут максимальную энергию U_m, а частицы, летящие в конце цуга, – минимальную $(U_m - \Delta U_{sb})$. То есть ΔU_{sb} есть максимальный энергетический разброс в пучке, вызванный полем излучения самого сгустка.

Ранее при рассмотрении полностью стационарного случая ($I_0(z) = const$) было введено понятие КПД ускорителя $\tilde{\eta}$ – отношения мощности, переданной ВЧ-системой пучку $P_П$, к мощности питания P_0 генератора. Так как сейчас мы рассматриваем нестационарный по току режим, то правильнее оперировать энергиями, то есть определить КПД ускорителя как отношение полной энергии, набранной пучком, к полной ВЧ-энергии генератора за время импульса

$$\eta_{tot} = \frac{W_П}{W_0}, \qquad (6.60)$$

где $W_П = \int_0^{\tau_b} I_0(\tau) \cdot U_{tot}(\tau)\, d\tau$ – энергия, набранная пучком за время заполнения секции, $W_0 = P_0 \cdot \tau_g$ – энергия генератора (τ_g – длительность импульса генератора).

Для короткого сгустка

$$W_П = \int_0^{\tau_b} I_0(\tau) \cdot U_{tot}(\tau)\, d\tau = I_0 \cdot U_m \cdot \tau_b \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta U_{sb}}{U_m}\right), \qquad (6.61)$$

откуда

$$\eta_{tot} = \frac{I_0 \cdot U_m \cdot \tau_b}{P_0 \cdot \tau_g} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta U_{sb}}{U_m}\right) = \eta \cdot \frac{T_f}{\tau_g} \cdot 2 \cdot \frac{\Delta U_{sb}}{U_m} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta U_{sb}}{U_m}\right). \qquad (6.62)$$

Обычно пучок запускают в секцию сразу после ее заполнения ВЧ-мощностью, а выключают ВЧ сразу после пролета “хвоста” пучка. То есть

$\tau_g \approx T_f + \tau_b$. Так как при рассмотрении короткого сгустка предполагалось, что $\tau_b << T_f$, то

$$\eta_{tot} \approx 2 \cdot \eta \cdot \frac{\Delta U_{sb}}{U_m} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta U_{sb}}{U_m}\right). \qquad (6.63)$$

Можно проверить, что максимум КПД достигается при $\Delta U_{sb} = U_m$, то есть при 100% энергетическом спектре! При этом максимальное значение КПД секции равно

$$\eta_{tot\,\max} \approx \eta,$$

то есть максимальный КПД ускорителя $\eta_{tot\,\max}$ примерно равен КПД ускоряющей структуры. Однако иметь на выходе секции пучок со 100 %-м энергетическим спектром на выходе нет смысла.

Уменьшение энергетического спектра

Энергетический спектр пучка возникает только из-за полей излучения самого сгустка. В поле генератора все частицы после пролета предварительно заполненной ВЧ-мощностью секции имеют одинаковую энергию независимо от длины сгустка. С учетом поля излучения получается, что частицы, летящие в начале сгустка, наберут большую энергию, а частицы, летящие в конце сгустка, – меньшую. Тогда можно попробовать инжектировать сгусток за некоторое время до конца заполнения секции. При этом частицы, летящие в начале сгустка, недоберут энергии от генератора, так как пролетят недозаполненную ВЧ-мощностью секцию. А частицы, летящие в конце сгустка, наберут чуть большую энергию от генератора. Тем самым в общем энергетический спектр можно уменьшить.

Посмотрим, что можно сделать таким способом с коротким сгустком. Если пучок инжектировать до окончания заполнения секции, то частицы пучка наберут энергию в поле генератора

$$U_g(\tau') = \begin{cases} U_m \cdot \dfrac{1 - \exp\left(-\tau'/\tau_{0A}\right)}{1 - \exp\left(-T_f/\tau_{0A}\right)} & \text{при } \tau' < T_f \\ U_m & \text{при } \tau' \geq T_f \end{cases}, \qquad (6.64)$$

где τ' – время, прошедшее после начала заполнения секции ВЧ-мощностью. Если пучок инжектировать за время Δ до окончания заполнения секции, то частица, влетевшая в момент времени τ, наберет в поле генератора энергию, соответствующую времени $\tau' = T_f - \Delta + \tau$ ($\tau = 0$ соответствует началу инжекции пучка, т. е. влету первой частицы сгустка).

$$U_g(\tau)=\begin{cases} U_m\cdot\dfrac{1-\exp\left[-\left(T_f-\Delta+\tau\right)/\tau_{0A}\right]}{1-\exp\left(-T_f/\tau_{0A}\right)} & \text{при } \tau<\Delta, \\ U_m & \text{при } \tau\geq\Delta, \end{cases} \tag{6.65}$$

$$1-\exp\left(-\frac{T_f-\Delta+\tau}{\tau_{0A}}\right)=1-\exp\left(\frac{\Delta-\tau}{\tau_{0A}}\right)\cdot\exp\left(-\frac{T_f}{\tau_{0A}}\right)=\Bigg|_{\tau,\Delta<<\tau_{0A}}\approx$$

$$\approx\eta^{1/2}\cdot\frac{T_f}{\tau_{0A}}\cdot\left(1-\frac{\Delta}{T_f\cdot\eta^{1/2}}+\frac{\tau}{T_f\cdot\eta^{1/2}}\right).$$

Тогда полная энергия, набранная частицей, влетевшей в момент времени τ, равна

$$U_{tot}(\tau)\approx\begin{cases} U_m\cdot\left(1-\dfrac{\Delta}{T_f\cdot\eta^{1/2}}+\dfrac{\tau}{T_f\cdot\eta^{1/2}}-\dfrac{\tau}{\tau_b}\cdot\dfrac{\Delta U_{sb}}{U_m}\right) & \text{при } \tau<\Delta, \\ U_m\cdot\left(1-\dfrac{\tau}{\tau_b}\cdot\dfrac{\Delta U_{sb}}{U_m}\right) & \text{при } \tau\geq\Delta. \end{cases} \tag{6.66}$$

Отсюда следует, что если $\dfrac{\tau_b}{T_f\cdot\eta^{1/2}}=\dfrac{\Delta U_{sb}}{U_m}$, то

$$U_{tot}(\tau)=\begin{cases} U_m\cdot\left(1-\dfrac{\Delta}{T_f\cdot\eta^{1/2}}\right)=const(\tau) & \text{при } \tau<\Delta, \\ U_m\cdot\left(1-\dfrac{\tau}{T_f\cdot\eta^{1/2}}\right) & \text{при } \tau\geq\Delta. \end{cases} \tag{6.67}$$

То есть если длительность сгустка $\tau_b<\Delta$, то пучок будет моноэнергетичный. Все частицы сгустка одинаково, независимо от времени влета уменьшат свою энергию, т. е. энергетический спектр пучка будет равен нулю. При $\tau_b\geq\Delta$ пучок будет иметь энергетический спектр шириной

$$\frac{\Delta U}{U_{max}}=\frac{\tau_b-\Delta}{T_f\cdot\eta^{1/2}}. \tag{6.68}$$

Отсюда следует, что максимальная длительность моноэнергетичного пучка тока τ_b должна быть равна времени задержки Δ, при этом полная набранная энергия пучка

$$U_{tot}(\tau) = U_m \cdot \left(1 - \frac{\Delta U_{sb}}{U_m}\right) = const(\tau). \qquad (6.69)$$

Полная энергия $W_П$, набранная пучком, равна

$$W_П = \int_0^{\tau_b} I_0(\tau) \cdot U_{tot}(\tau)\, d\tau = I_0 \cdot U_m \cdot \tau_b \cdot \left(1 - \frac{\Delta U_{sb}}{U_m}\right), \qquad (6.70)$$

а КПД ускорителя

$$\eta_{tot} = 2 \cdot \eta \cdot \frac{\Delta U_{sb}}{U_m} \cdot \left(1 - \frac{\Delta U_{sb}}{U_m}\right). \qquad (6.71)$$

Максимум КПД достигается при подсадке напряжения $\frac{\Delta U_{sb}}{U_m} = \frac{1}{2}$, что соответствует $\eta_{tot\,max} = 0{,}5 \cdot \eta$. Ранее было показано, что наилучший режим работы секции достигается при $T_f / \tau_{0A} = 0{,}5$. При этом $\eta = 0{,}619$, $\eta_{tot\,max} = 0{,}31$, а длительность пучка тока должна быть

$$\frac{\tau_b}{T_f} \le \eta^{1/2} \cdot \frac{\Delta U_{sb}}{U_m} = 0{,}39. \qquad (6.72)$$

Глава 7

УСКОРЯЮЩИЕ СТРУКТУРЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УСКОРИТЕЛЕЙ

Как было показано ранее, ускоряющую структуру можно представить в виде цепочки связанных резонаторов. Ячейка ускоряющей структуры при таком представлении содержит резонансный элемент и элемент связи между соседними резонансными элементами. С этой точки зрения все ускоряющие структуры можно классифицировать по резонансному элементу, резонансная частота которого определяет в основном рабочую частоту ускоряющей структуры.

В волноводной технике можно выделить три резонансных элемента:

1. Объемный резонатор. В ускорительной технике обычно это цилиндрический резонатор на виде колебания E_{010}. Диаметр резонатора определяет рабочую частоту ускоряющей структуры, а его длина – фазовую скорость ускоряющей пространственной гармоники. Ускоряющее поле в цилиндрическом резонаторе аксиально симметричное, имеет максимум на оси и, что особенно важно, не зависит от длины резонатора. Объемные цилиндрические резонаторы как резонансный элемент используют в основном для ускорителей с большой фазовой скоростью при $\beta_\phi \approx 1$, когда длина резонатора (длина периода) сравнима с радиусом резонатора. При этом добротность резонатора, а вместе с ней и шунтовое сопротивление структуры максимальны. При переходе к малым фазовым скоростям длина резонатора уменьшается. Растет количество металлических стенок на единицу длины структуры. Следовательно, возрастают тепловые потери мощности на единицу длины структуры, и величина шунтового сопротивления резко падает. Поэтому для ускорителей с $\beta_\phi << 1$ надо выбирать другой резонансный элемент ячейки структуры.

2. Резонансный штырь. По тонкому штырю распространяется волна, аналогичная ТЕМ волне коаксиальной линии. Поэтому при длине штыря, равной примерно четверти волны в свободном пространстве, этот штырь работает как четвертьволновый резонатор. В основании штыря напряжение равно нулю, а на другом конце – максимально. Штыри обычно располагаются в круглом волноводе, а на концах, где напряжение максимально, помещается круглая шайба либо трубка дрейфа для пролета и ускорения пучка, причем шайбы и трубки дрейфа естественно располагать по оси структуры. Так как рабочая длина волны определяется в основном длиной штыря, то диаметр ускоряющей структуры, резонансным элементом которого являются четвертьволновые штыри, примерно равен половине длины

волны в свободном пространстве. Расстояние между штырями определяет фазовую скорость ускоряющей гармоники. При этом отрезок волновода между шайбами или трубками дрейфа является запредельным круглым волноводом, то есть ускоряющие поля оказываются сосредоточенными вблизи трубок дрейфа и резко спадают к центру между ними при больших расстояниях. Это приводит к тому, что амплитуда ускоряющей пространственной гармоники (а вместе с ней и величина шунтового сопротивления гармоники) резко уменьшается, а амплитуды высших гармоник возрастают. Поэтому такие ускоряющие структуры можно применять только при малых фазовых скоростях ускоряющей гармоники $\beta_\phi << 1$, когда расстояние между шайбами или трубками дрейфа мало, а амплитуда ускоряющей гармоники и величина шунтового сопротивления остается приемлемой.

3. Резонансная щель. В длинной узкой щели, прорезанной в проводящей поверхности, распределение электрического поля примерно совпадает с распределением поля в H_{10} - прямоугольном волноводе. При длине щели, равной половине длины волны, она становится резонансной, и ее можно использовать как резонансный элемент ячейки замедляющей системы, если диафрагмы с такими щелями расположить периодически, например, в круглом волноводе. Фазовая скорость при этом будет определяться в основном длиной круглого волновода между диафрагмами. Этот волновод может оказаться запредельным. Ускоряющие поля тоже окажутся сосредоточенными вблизи диафрагмы с резонансной щелью и начнут резко спадать к центру ускоряющего промежутка. Поэтому такие ускоряющие структуры можно применять только при малых фазовых скоростях ускоряющей гармоники. Так как щель резонансная, максимальное электрическое поле сосредоточено в зазоре щели. Это уменьшает электрическую прочность системы в целом. Поэтому щели в ускорительной технике как резонансный элемент используются крайне редко. Обычно их используют как элемент связи между объемными резонаторами. Тогда щель не является резонансной, а электрическая прочность структуры определяется конфигурацией самого резонатора.

Связанные объемные резонаторы

Ширина полосы пропускания замедляющей системы с выбранным резонансным элементом определяется элементом связи. На рисунке 7.1 показаны различные типы ускоряющих структур, в которых резонансным элементом является цилиндрический резонатор. По техническому исполнению элемента связи их можно разбить на две группы: резонаторы с внутренними связями, когда связь с соседним резонатором осуществляется

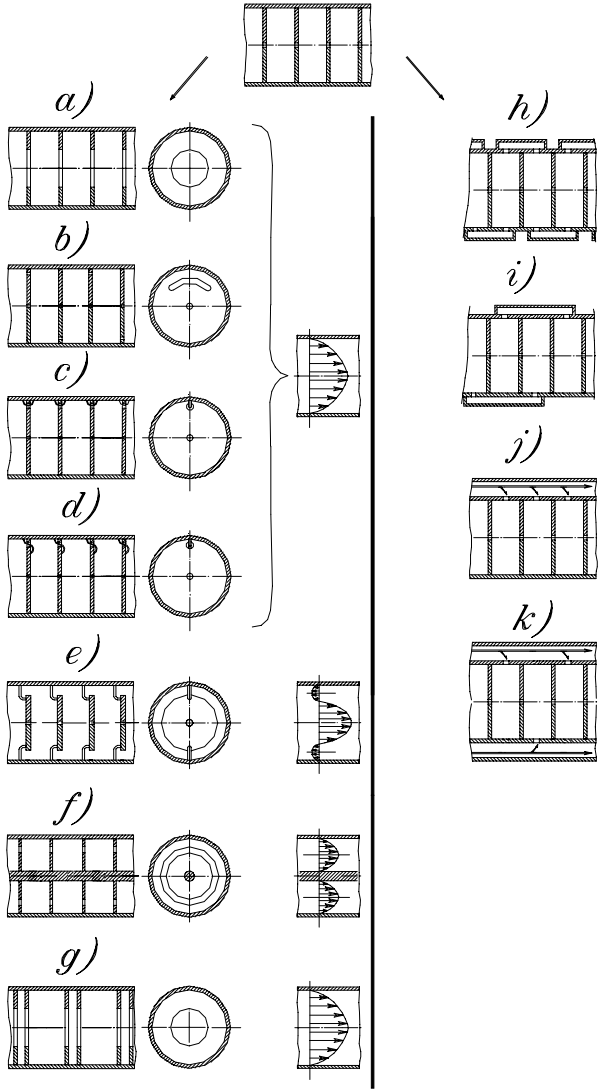


Рис. 7.1. Ускоряющие структуры типа связанных объемных резонаторов

через элемент, размещенный на торцевой стенке резонатора, и с внешними, вынесенными, когда элемент связи находится на боковой цилиндрической поверхности резонатора.

На рис. 7.1, *a* изображена самая распространенная ускоряющая структура – круглый диафрагмированный волновод КДВ (английское название – The disk-loaded structure). Цилиндрические резонаторы с E_{010} - видом колебания связаны между собой диафрагмой с круглым отверстием посередине. Отношение диаметра структуры к рабочей длине волны $\varnothing / \lambda \approx$ 0,6÷0,8. Имеет положительную дисперсию. Отличается очень узкой полосой – величина относительной групповой скорости $\beta_{\text{гр}} \approx 0{,}001 \div 0{,}1$ и определяется диаметром отверстия связи. Применяется в основном для ускорителей электронов с $\beta \approx 1$. Чаще всего при работе в бегущем режиме используют виды колебания $\theta = 2\pi / 3$ и $\pi / 2$, а при работе в стоячем режиме – вид π или $\pi / 2$ (в так называемых биперiодических структурах (см. ниже)). Имеет шунтовое сопротивление порядка R_{sh} ~ 30÷60 МОм/м.

На рисунке 7.1, *b* элементом связи является щель, обычно расположенная в максимуме магнитного поля E_{010} - резонатора для увеличения связи. О резонаторах со щелевыми связями (рис. 7.1, *b*) см. чуть ниже.

Рисунки 7.1, *c* и 7.1, *d* – резонаторы с петлевыми элементами связи (Loop coupled cavity). Предложены в 1956 году Данном (Dunn P. D. et all..). Основной резонансный элемент – также цилиндрический E_{010} - резонатор. На рисунке 7.1, *c* представлена структура с U- образной петлей связи (U-shaped loops). Исследовалась Чодоровым и Крейгом (Chodorow M. and R. A. Craig) в 1957 году. Обладает отрицательной дисперсией. Связь резонаторов в виде S-образной петли (S-shaped loops) предложена Пирсом (Pearce A. F.) в 1958 году. Обладает положительной дисперсией. Отличительная особенность – очень широкая полоса пропускания, до 40 %. U-образная и S-образная петли связи могут находиться не около одной стенки резонатора, а на разных. При этом получается, что в одном резонаторе петли расположены на противоположных сторонах (повернуты на угол 180°). В 1968 году Кинг (King R. C. M.) предложил модификацию U-образной петли связи: в отверстия для петель пропустить сплошной проводник, прикрепляемый к волноводу в середине каждого резонатора (U-петля как бы растягивается на весь резонатор и проходит сквозь все резонаторы). Такая структура также имеет отрицательную дисперсию. Ее полоса пропускания ~ 30 %.

В 1965-1969 годах Андреев В. Г. и его команда предложили использовать резонатор не на виде колебания E_{010}, а на виде E_{020} (см. рис. 7.1, *e*) –

так называемая структура с проводящими шайбами и диафрагмами (The washer-loaded structure). Ее можно рассматривать как волновод на виде колебания E_{02}, нагруженный диафрагмами, не касающимися внешней стенки резонатора. Так как связь осуществляется через широкую кольцевую щель между диафрагмой и боковой стенкой резонатора, в отличие от КДВ она имеет широкую полосу пропускания. Вообще эта структура имеет наиболее высокий коэффициент связи (К=30÷50 %) среди всех ускоряющих структур, работающих на $\pi/2$ - волне. Диафрагмы на оси структуры удерживаются Г-образными подпорками, расположенными в пучности электрического поля E_{020}-конфигурации. Тем самым они вносят минимальное возмущение. При работе в стоячем режиме структура Андреева обычно используется на виде колебания π, где шунтовое сопротивление максимально. В таблице приведены эффективные шунтовые сопротивления для протонных ускорителей со структурой Андреева на различные энергии, работающие на частоте $f = 1000$ МГц.

W, МэВ	45	150	250	700
$Z_{эфф}$, МОм	5	20	26	36

Еще один пример резонаторов с внутренним элементом связи – на рисунке 7.1, *f*. Резонаторы с E_{010} - коаксиальным видом колебания, имеющем ускоряющее E_z поле не на оси, где расположен центральный проводник и поле равно нулю, а на некотором радиусе, примерно посередине между центральным проводником и внешней цилиндрической стенкой резонатора. Связь между резонаторами осуществляется через кольцевую щель, через которую и пропускают пучок. Такая ускоряющая структура обладает положительной дисперсией и используется для ускорения трубчатых пучков.

При использовании любой ускоряющей структуры не в бегущем режиме, а в режиме стоячих волн важную роль играет расположение торцевых стенок. От этого зависит распределение электрического поля в образованном резонаторе. Например, в круглом диафрагмированном волноводе торцевые стенки можно расположить в середине диафрагмы (см. рис. 7.2, *a*). Известно, что шунтовое сопротивление структуры максимально на π - виде колебания. Однако полученный резонатор не может быть возбужден на виде π. На виде колебания $\pi/2$ в резонаторе из 4 ячеек распределение поля на оси будет иметь вид, представленный на рис. 7.2, *a*. Если торцевые стенки расположить посередине резонатора, как на рис. 7.2, *b*, то распределение поля на том же виде колебания $\pi/2$ при том же количестве полных ячеек

будет иметь другой вид (см. рис. 7.2, *b*).

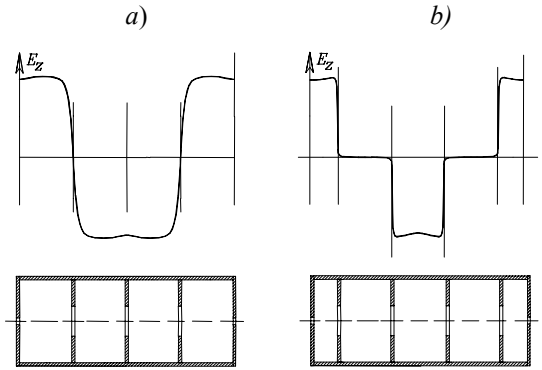
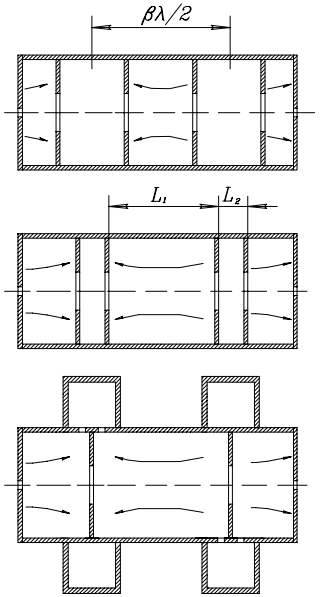


Рис. 7.2. КДВ на виде $\pi / 2$ с различным расположением торцевых стенок:
a) в середине диафрагмы,
b) посередине резонатора.

В таком резонаторе вид π может быть возбужден. Но на нем неудобно работать, так как этот вид лежит на краю пропускания структуры и поэтому очень критичен к исполнению. На этом виде колебания усложняется настройка структуры. Возрастает и влияние изменений температуры, частоты генератора, погрешностей изготовления, величины нагрузки пучком и др. на стабильность электромагнитного поля в структуре. Из рисунка 7.2, *b* видно, что на виде колебания $\pi / 2$ в такой структуре в каждой четной ячейке поле E_z на оси структуры равно нулю. Она просто служит ячейкой связи. В 1965 году Нэпп Е. А. (Knapp E. A.) предложил уменьшить длину этой ячейки связи (см. рисунок) с сохранением рабочего вида колебания $\theta = \pi / 2$ (т. е. $L_1 + L_2 = \beta \lambda / 2$), тем самым уменьшив область, в которой нет электрического поля. Полученная таким



образом структура (см. рис. 7.1, *g*) является бипериодической, то есть один полный ее период состоит из двух резонаторов разной длины. А впоследствии ячейка связи вообще была вынесена наружу (см. рисунок) и получилась структура с внешней ячейкой связи (см. рис.7.1, *h*). Такая структура также является бипериодической, рабочий вид колебания у нее также $\pi/2$, но теперь ускоряемый пучок, пролетающий такую структуру "видит" только набор одинаковых резонаторов со сдвигом фаз π между ними. Бипериодическая структура, будучи рассчитана на вид $\pi/2$, имеет хорошую стабильность электромагнитного поля к возмущающим факторам. С другой стороны, за счет реализации в ускоряющих ячейках сдвига фазы волны π эффективное шунтовое сопротивление таких структур оказывается высоким. Максимальное значение эффективного шунтового сопротивления бипериодической структуры в десятисантиметровом диапазоне волн достигает 100 МОм/м. Бипериодические структуры имеют значительный коэффициент связи, достигающий в отдельных случаях 0,4, причем его можно регулировать в широких пределах при сохранении размеров пролетного канала и без существенного изменения шунтового сопротивления.

По-видимому, с бипериодических структур с вынесенными ячейками связи и начинались все ускоряющие структуры с внешними элементами связи. На рисунке 7.1, *i* представлена структура, у которой связь осуществляется через ячейку. На рисунке 7.1, *j* изображена структура с параллельными связями. Отдельные несвязанные резонаторы запитываются от общего волновода через отверстия в боковой стенке. А на рисунке 7.1, *k* представлена структура, у которой резонаторы запитываются через один от разных волноводов. Такая структура представляет собой как бы две вложенные друг в друга структуры. Так как они могут быть запитаны от разных источников, то появляется возможность оперативно изменять действующее на ускоряемые частицы поле, причем можно менять как амплитуду в разных волноводах, так и фазу.

Щелевые элементы связи

На рисунке 7.3 изображены различные структуры со щелевой связью между резонаторами. Стрелками показаны эволюции перехода одной конфигурации щели в другие. В структурах с длинной узкой дугообразной щелью длинные ребра щели ведут себя как два проводника передающей линии, которая закорочена с двух концов. Поле щели, таким образом, является ТЕМ волной вдоль продольного измерения щели. Щель становится резонансной, когда ее длина равна целому числу полуволн укладывающих-

ся по длине щели. Щель возбуждается радиальными токами диафрагм резонатора. В зависимости от длины щели низшая полоса пропускания такой структуры может быть либо щелевой (длинная щель), либо резонаторной (короткая щель).

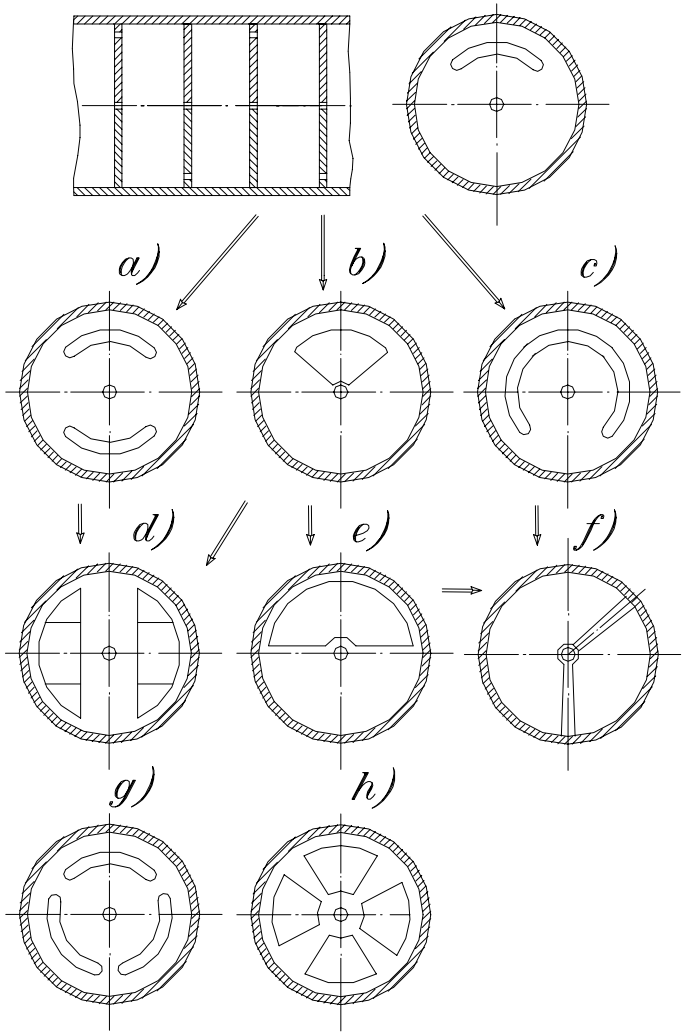
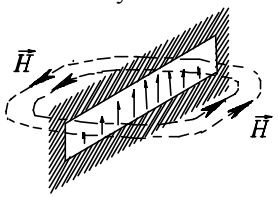
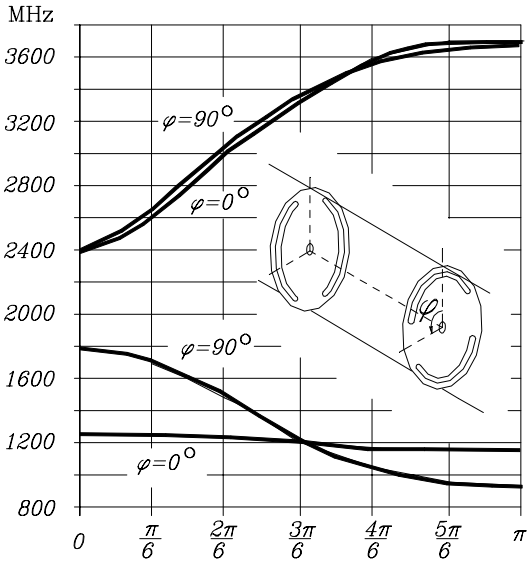


Рис. 7.3. УС со щелевой связью между резонаторами

Но в любом случае дисперсия структур со щелевой связью между резонаторами в низшей полосе пропускания отрицательна. Это обусловлено тем, что связь через щель идет по магнитному полю, как показано на рисунке, а не по электрическому, как у КДВ с центральным отверстием связи. Магнитное поле оказывается разнонаправленным по разные стороны щели. Для увеличения коэффициента связи увеличивают либо количество щелей (рис. 7.3, *a*), либо отверстие связи делают секториальным (рис. 7.3, *b*).



Аллен и Кайно (M.A. Allen and G.S. Kino) в 1960 году подробно исследовали свойства структур с двумя щелями связи (см. рисунок). При двух щелях связи появляется возможность регулировать наклон дисперсионной кривой путем изменения угла взаимной ориентации двух соседних диафрагм со щелями. На рисунке показаны дисперсионные кривые для двух углов ориенции $\varphi = 0^{\circ}$ и $\varphi = 90^{\circ}$. Резонансная частота щели для приведенного примера равна $f_{щ} = 1300$ МГц, а резонансная частота цилиндрического резонатора $f_0 = 2409$ МГц. Из рисунка видно, что при изменении угла ориентации φ дисперсионная кривая в низшей (щелевой) полосе пропускания поворачивается вокруг вида $\pi/2$, а вторая дисперсионная кривая, соответствующая резонаторной полосе пропускания, практически не меняется.



Рисунки 7.3, *d* и 7.3, *e* показывают, как можно еще больше расширить полосу пропускания увеличением размеров одной или двух щелей. На рисунке 7.3, *g* показана щелевая структура с тремя щелями связи, а на рисунке 7.3, *h* – с четырьмя секториальными щелями связи. Рисунок 7.3, *f* – пример того, как можно довести длинную щель (рис. 7.3, *c*) либо полусекториальную щель (рис. 7.3, *e*) до принципиально другого резонансного элемента – штыря.

Штыревые ускоряющие структуры

В связанных резонаторах при малом периоде ($\beta << 1$) резко падает добротность резонатора, т. е. шунтовое сопротивление таких структур мало. С этим связан переход при малых энергиях ускоряемых частиц (например, для ускорителей протонов) с резонаторных ускоряющих структур к штыревым. На рисунке 7.4 изображены различные конфигурации структур со штыревым резонансным элементом.

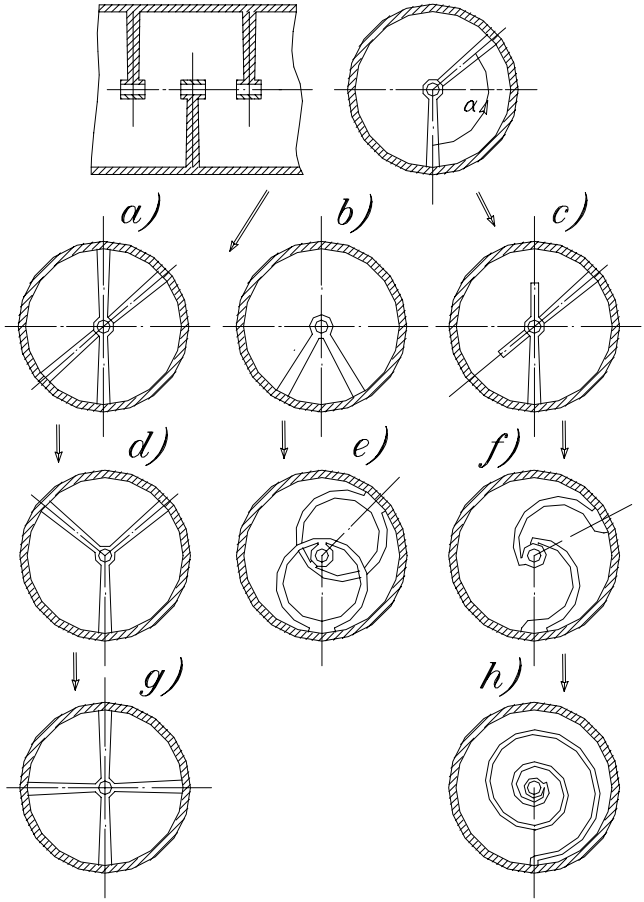
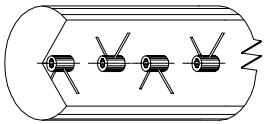


Рис. 7.4. УС со штыревым резонансным элементом

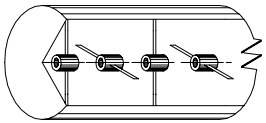
Обычно штыри делают четвертьволновыми, чтобы не увеличивать поперечные размеры структуры. На концах штырей, где напряжение максимально, располагают либо металлическую шайбу (при использовании структуры в бегущем режиме) либо трубку дрейфа (в режиме стоячих волн). Соседние штыри могут быть повернуты относительно друг друга на некоторый угол α. При этом меняется величина взаимной индукции между соседними штырями. Это приводит к тому, что наклон дисперсионной кривой изменяется так же, как у структур с двумя щелями. Вид $\pi/2$ при этом в низшей полосе пропускания тоже остается на месте. В отличие от структур с двумя штырями, при изменении угла α от нуля до 180° дисперсия структуры меняется с положительной на отрицательную.

Одна из модификаций штыревой структуры состоит в увеличении числа поддерживающих трубку дрейфа штырей. На рисунке 7.4, *a* изображена структура с двумя поддерживающими штырями, развернутыми на 180°. У нас она называется структурой с параллельными стержнями (СПС), английское название – cross-bar structure. На рисунке 7.4, *b* тоже изображена структура с двумя стержнями, но разведенными на некоторый угол θ, обычно 30°÷90°. Многоштыревые структуры (рис. 7.4, *a*, *b*, *d* и *g*) для протонных ускорителей исследовали в 1966 году Жордано (Giordano et. all.). Ими были установлены оптимальные конфигурации штыревых структур для различных энергетических диапазонов энергий ускоряемых протонов. На следующих пяти рисунках приведены такие оптимальные конфигурации для ускорителя на рабочую частоту 200 МГц:

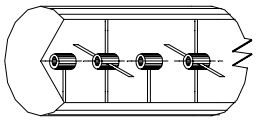
Очень малые энергии
0,75 – 8 МэВ, $Z_Э = 17{,}9 - 40{,}5$ МОм/м,



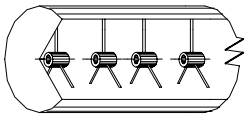
Малые энергии
8 – 17 МэВ, $Z_Э = 40{,}5 - 38{,}3$ МОм/м,



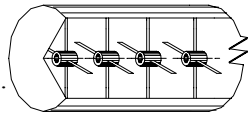
Малые энергии
10-17 МэВ, $Z_Э = 42{,}6$ - 40 МОм/м,



Средние энергии
17– 45 МэВ, $Z_Э = 43{,}7 - 29{,}9$ МОм/м,



Высокие энергии
45 – 100 – 200 МэВ, $Z_Э = 36{,}4 - 19{,}0 - 8{,}1$ МОм/м.

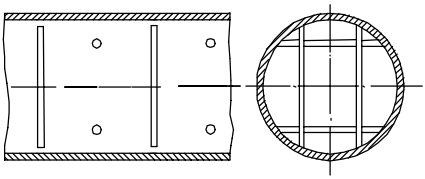


На рисунке 7.4, *е* приведена геометрия ускоряющей структуры О-кольца. Такая структура имеет меньший диаметр по сравнению со структурой с прямым стержнем. Структура имеет в низшей полосе отрицательную дисперсию и высокие значения шунтового сопротивления.

Уменьшение поперечных размеров структуры возможно и просто уменьшением диаметра волновода с сохранением шайбы на оси волновода (рис. 7.4, с). Но при этом максимальное напряжение все же приходится на конец штыря. Поэтому для уменьшения поперечного размера волновода используют сворачивание штыря. На рисунке 7.4, *f* изображена структура “полукольца в круглом волноводе”. Такая структура была использована при разработке ускорителя на обратной волне.

Дальнейшее уменьшение диаметра структуры возможно при сворачивании штыря в спираль (рис. 7.4, *h*). Спиральные резонаторы с трубкой дрейфа на конце используются для создания на их основе сверхпроводящих ускоряющих структур.

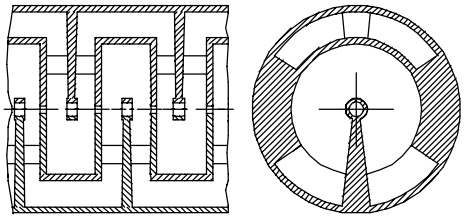
Для всех многоштыревых систем относительная групповая скорость $\beta_{гр} \approx 0{,}35$, что соответствует очень сильной связи между штырями.



Еще одна штыревая структура, стоящая как бы отдельно, – скрещенные стержни (Jungle gym bar-loaded structure). Она скорее похожа просто на круглый волновод, нагруженный стержнями. Имеет также довольно высокое шунтовое сопротивление (~50 МОм/м в десятисантиметровом диапазоне волн) и широкую полосу пропускания ($\beta_{гр} \approx 0{,}1 \div 0{,}2$).

На основе штыревой структуры можно сделать структуру, состоящую из

двух вложенных структур на бегущей волне (см. рисунок). Меняя амплитуду и фазу на входе, можно получать различные отношения между амплитудами пространственных гармоник.



Это можно использовать в ускорителе с фазопеременной фокусировкой: Один из вариантов фазопеременной фокусировки состоит в выборе определенного соотношения между амплитудами основной (ускоряющей) пространственной гармоники и фокусирующей (обычно третьей) гармоникой. В этой структуре нет необходимости подбирать длины трубок дрейфа для обеспечения нужного отношения амплитуд гармоник. Достаточно изменить фазу между двумя питающими волноводами.

В 1931 году Слоун и Лоуренс (Sloan D. H. and Lawrence E. O.) по принципу первого ускорителя Видероэ (Wider e R., 1928 г.) создали протонный ускоритель на энергию 0.5 МэВ на двойной линии (см. рис. 7.5). Он работал на частоте 85 МГц и имел шунтовое сопротивление 140 МОм/м. В дальнейшем он был преобразован в экранированную двойную линию.

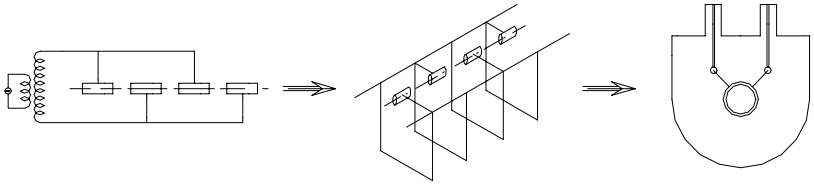


Рис. 7.5. Эволюция ускорителя Видероэ в двойную экранированную линию

Резонаторы Н-типа

В 1962 году Зейдлиц П. М. и Ямницкий В. А. предложили, а в 1965 году Бомко В. А. и Ревуцкий Е. И. подробно исследовали так называемые Н-резонаторы. На рисунке 7.6 показана эволюция резонансной петли в Н-резонатор и встречно-штыревую структуру. В Н-резонаторе магнитное поле полностью охватывает нижний и верхний пилоны, тем самым создавая на трубках дрейфа, закрепленных на них, напряжения различной полярности. Встречно-штыревая структура с трубками дрейфа использовалась ими в резонансном режиме на виде колебания π и имела следующие

характеристики:

рабочая частота – 30 МГц,
диаметр структуры – 1,5 м,
шунтовое сопротивление – 80 МОм/м,
энергия ускоряемых тяжелых ионов – 1 МэВ,
трубки дрейфа имели диаметр ~10 см для возможности размещения магнитов.

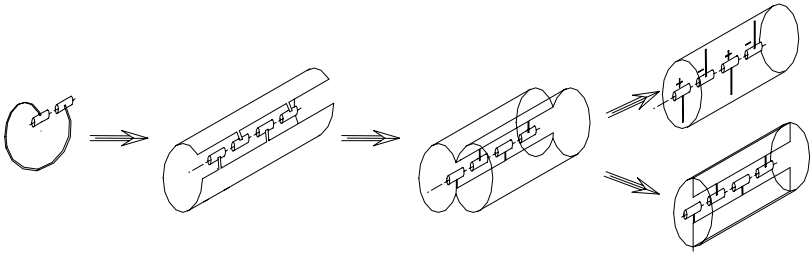


Рис. 7.6. Эволюция резонансной петли в Н-резонатор и встречно-штыревую структуру

Аналогичные резонаторы Н-типа используются при квадрупольной ВЧ-фокусировке (см. рис. 7.7). Только они имеют четыре пилона с волнообразным профилем в месте пролета пучка.

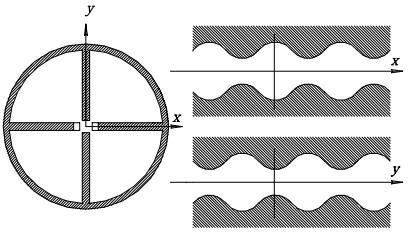


Рис. 7.7. Н-резонатор с пилонами

Тепляков В. А. в 1967 году предложил немного другую конструкцию Н-резонатора, работающего на 2π моде. 2π – сдвиг фазы на геометрическом периоде $2L$ для электрического поля, а для магнитного – 0 (см. рис. 7.8). Ускоряющий резонатор имел следующие параметры:

рабочая частота – 150 МГц,
шунтовое сопротивление $0{,}7/\beta^2$ МОм/м,
рабочая энергия – 8 МэВ/нуклон ($\beta \approx 0{,}13$),
размер бака – 0,4 м ($0{,}2\,\lambda$).

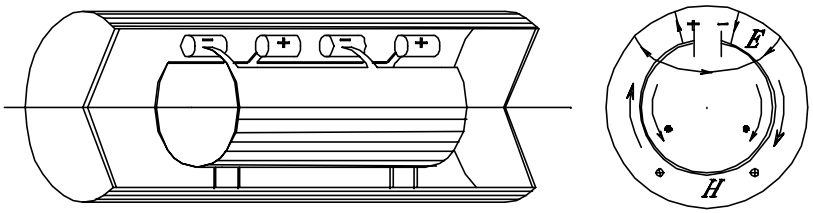


Рис. 7.8. Н-резонатор Теплякова

То есть ускоряющая структура Теплякова имела шунтовое сопротивление выше, чем структура Альвареца на ту же энергию, и в то же время ее внешний диаметр был в 3-4 раза меньше.

В сводной таблице приведены основные характеристики некоторых рассмотренных ускоряющих структур.

Таблица 7.1

Тип структуры	F, Ггц	β_{ϕ}	$\beta_{\text{гр}}$	R_{sh}	$Q_0 \cdot 10^{-3}$	$\varnothing / \lambda$	θ
КДВ	2,856	1	0,004	65	13	0,77	$\pi / 2$
КДВ	2,856	1	0,041	46	13	0,8	$\pi / 2$
КДВ	2,856	1	0,102	35	13	0,8	$\pi / 2$
СПС	2,856	1	0,102	46	6,7	0,47	$\pi / 2$
Андреев	2,856	1	-	85	10	1,33	π
Jungle gym....	2,8	1	0,22	51	9	0,8	$\pi / 2$
Jungle gym.....	2,8	1	0,1	60	9	0,8	$\pi / 3$
Бипериодич .	2,8	1	0,033	61	13,3	0,73	$\pi / 2$
Альварец	0,2	0,2	-	60	-	0,25	0
Встр. штыри	0,9	0,5	0,2	180	5,5	0,27	$5\pi / 6$
Полукольца	1,8	0,06	0,25	150	3	0,24	$5\pi / 6$

Глава 8

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСКОРЯЮЩИХ СТРУКТУР

Основными электродинамическими характеристиками ускоряющих структур (УС), необходимыми для проектирования и расчета динамики ускорителя в целом, являются

$f\ (\lambda)$ – частота ВЧ-колебаний (длина волны);

θ – вид колебания или сдвиг фазы на ячейку на данной частоте:

$\theta = \beta_z d = 2\pi\, d / \lambda_g$, где λ_g – длина волны этого вида колебания в ускоряющей структуре,

d – период УС (обычно по пространству взаимодействия);

$\beta_ф$ – относительная фазовая скорость волны на данном виде колебания:

$$\beta_ф = \frac{v_ф}{c} = \frac{\lambda_g}{\lambda},$$ где $v_ф$ – фазовая скорость волны,

c – скорость света;

W – кинетическая энергия синфазных с волной ускоряемых частиц:

$$W = W_0(\gamma - 1) = W_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

где $\beta = \beta_ф$ – относительная скорость частиц, W_0 – энергия покоя:

$$W_0 = \begin{cases} 0{,}511 \text{ МэВ} & \text{- энергия покоя электрона,} \\ 938{,}529 \text{ МэВ} & \text{- энергия покоя протона;} \end{cases}$$

$\beta_{гр}$ – относительная групповая скорость:

$$\beta_{гр} = \frac{v_{гр}}{c} = \frac{1}{c}\frac{d\,\omega}{d\,\beta_z} = \frac{d(2\pi/\lambda)}{d(2\pi/\lambda_g)} = \frac{2\pi\, d}{c}\cdot\frac{df}{d\,\theta};$$

Q_0 – собственная добротность (для резонаторных УС),

$\alpha_Е$ – коэффициент затухания по электрическому полю (для УС на бегущей волне):

$$\alpha_Е = \frac{\pi}{Q_В \beta_{гр} \lambda},$$ где $Q_В$ – волноводная добротность;

$\frac{E_{n\,б}}{\sqrt{P_б}}$ – параметр напряженности электрического поля n -й пространственной гармоники,

где $E_{n\,б}$ – амплитуда n -й гармоники в *бегущем* режиме,

$P_б$ – мощность ВЧ-поля в УС в *бегущем* режиме;

$R_{sh\,n} = \frac{E_{n\,б}^2}{2\alpha_E P_б}$ – шунтовое сопротивление n -й гармоники УС.

Метод резонансного макета

Для измерения этих характеристик структуры чаще всего используется метод резонансного макета. Резонансный макет ускоряющей структуры представляет собой отрезок структуры, включающий в себя несколько одинаковых ячеек УС и закороченый с двух сторон металлическими стенками. Таким образом, из структуры с бегущей волной получается резонатор со стоячими волнами.

Для образования резонатора из регулярного волновода стенки необходимо располагать перпендикулярно направлению распространения волны в волноводе. Тогда сам образованный резонатор и его зеркальное отражение от стенок представляют собой бесконечный исходный волновод. При этом распределение полей в стоячем режиме в образованном резонаторе будет полностью соответствовать мгновенному распределению поля в бегущей волне в какой-то момент времени. Это же правило необходимо соблюдать и при образовании резонансного макета из периодической ускоряющей структуры. Но, кроме того, чтобы распределение полей в стоячем режиме в резонансном макете совпадало с мгновенным распределением поля в бегущей волне, надо располагать стенки в таких местах, чтобы часть УС, образующая резонансный макет, и ее зеркальное отражение от стенок резонансного макета представляли собой бесконечную *периодическую* структуру с постоянным периодом. В некоторых случаях (например, в случае спирали) это не удается. Тогда желательно выбирать большое количество периодов системы с тем, чтобы уменьшить влияние границ. В круглом диафрагмированном волноводе (КДВ) таких “правильных“ мест два – посередине металлической диафрагмы и посередине основного E_{010} - резонатора.

Распределение электрического поля на оси бесконечной периодической ускоряющей структуры с периодом d представляет собой сумму пространственных гармоник

$$E_z(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k \, e^{-j\beta_k z} \, , \tag{8.1}$$

где E_k – амплитуда k-й пространственной гармоники в бегущем режиме,

$\beta_k = \dfrac{\theta + 2\pi k}{d}$ – волновое число k-й пространственной гармоники.

Гармонику с $k = 0$ называют основной пространственной гармоникой, по которой и определяется вид колебания θ.

Рассмотрим для примера резонансные макеты КДВ, образованные из N ячеек, у которых боковые стенки проходят посередине металлической диафрагмы (рис. 8.1, *a*) и посередине резонатора (рис. 8.1, *b*).

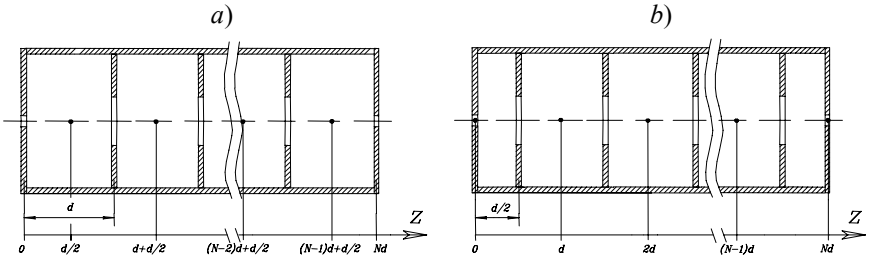


Рис. 8.1. Резонансные макеты КДВ с различным расположением боковых стенок

Распределение электрического поля на оси таких макетов можно записать

$$E_{z\,p}(z) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k \cos\beta_k z \, . \tag{8.2}$$

Здесь по-прежнему E_k – амплитуда k-й гармоники в *бегущем режиме*.

Поперечные составляющие электрического поля пропорциональны производной от $E_{z\,p}$:

$$\vec{E}_{\perp p} \sim \frac{\partial E_{z\,p}}{\partial z} = -2\sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k \, \beta_k \sin\beta_k z \, . \tag{8.3}$$

Тогда из условия обращения в ноль поперечных составляющих на металлических боковых стенках при $z = 0$ и $z = Nd$ получим условие для нахождения θ в образованных резонансных макетах:

$$\sin(\beta_k N d) = \sin(\theta N) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta N = \pi m \, , \tag{8.4}$$

где m может меняться от 0 до N. В таких макетах могут возбуждаться

только виды колебания

$$\theta_m = \frac{\pi\, m}{N}, \text{ где } m \text{ пока ничем не ограничено: } m = 0,1,2,\ldots N. \qquad (8.5)$$

Запишем электрическое поле в середине каждой ячейки для случая 8.1 *а* при $z = d/2 + (n-1)d$, где $n = 1,2,...N$ – номер ячейки: (8.6)

$$E_{z\,p\,n} = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k \cos\left[\frac{\theta_m + 2\pi\, k}{d}\left((n-1)d + \frac{d}{2}\right)\right] = 2\cos\left(n\theta_m - \frac{\theta_m}{2}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k (-1)^k$$

Отсюда видно, что при $m = N$ ($\theta_N = \pi$) поле во всех ячейках будет равно нулю. То есть в резонансном макете с боковыми стенками, проходящими посередине диафрагмы, могут возбуждаться все виды, кроме π:

$$\theta_m = \frac{\pi\, m}{N}, \text{ где } m = 0,1,2,\ldots N-1. \qquad (8.7)$$

Электрическое поле в середине каждой ячейки в резонансном макете из N ячеек, у которого боковые стенки проходят посередине ячейки (рис. *b*) при $z = n\,d$, где $n = 0,1,2,...N$ – номер ячейки, включая и две полуячейки, есть:

$$E_{z\,p\,n} = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k \cos\left[\frac{\theta_m + 2\pi\, k}{d} nd\right] = 2\cos(n\theta_m)\sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k. \qquad (8.8)$$

Отсюда видно, что, в отличие от случая *а*, в таком резонансном макете могут возбуждаться все виды, включая вид π:

$$\theta_m = \frac{\pi\, m}{N}, \text{ где } m = 0,1,2,\ldots N. \qquad (8.9)$$

Возбуждаемые в резонансном макете виды колебаний зависят от числа ячеек в макете. Поэтому число ячеек надо выбирать так, чтобы по крайней мере возбуждался интересующий вид колебания. Кроме того, для более точного расчета групповой скорости надо, чтобы возбуждались и соседние виды колебаний.

Измерение добротности и коэффициента затухания

Измерение добротности резонансных макетов можно проводить двумя способами – по отраженному от резонатора сигналу при одной связи резонатора с измерительной цепью и по проходящему сигналу при наличии двух входов в резонатор.

Для проходного резонатора с двумя элементами связи с подводящими линиями с коэффициентами связи β_1 и β_2 матрицу рассеяния можно записать как

$$S=\begin{pmatrix} \dfrac{(\beta_1-\beta_2-1)-2iQ_0\delta_\omega}{(\beta_1+\beta_2+1)+2iQ_0\delta_\omega} & -\dfrac{2\sqrt{\beta_1\beta_2}}{(\beta_1+\beta_2+1)+2iQ_0\delta_\omega} \\ -\dfrac{2\sqrt{\beta_1\beta_2}}{(\beta_1+\beta_2+1)+2iQ_0\delta_\omega} & \dfrac{(\beta_1-\beta_2-1)-2iQ_0\delta_\omega}{(\beta_1+\beta_2+1)+2iQ_0\delta_\omega} \end{pmatrix}, \qquad (8.10)$$

где Q_0 – собственная добротность резонатора,

$\delta_\omega=\dfrac{\omega-\omega_0}{\omega_0}$ – относительная расстройка резонатора.

Квадрат модуля коэффициента отражения, равный отношению отраженной мощность к падающей, есть

$$|\Gamma(\omega)|^2\equiv\frac{P_{\text{ОТР}}}{P_{\text{ПАД}}}=\left|S_{11}\right|^2=\frac{\left(\dfrac{1-\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1+\beta_2}\right)^2+4Q_{\text{Н}}^2\delta_\omega^2}{1+4Q_{\text{Н}}^2\delta_\omega^2}, \qquad (8.11)$$

а квадрат модуля коэффициента прохождения (отношение мощности, прошедшей через резонатор, к падающей) есть

$$\frac{P_{\text{ПРОШ}}}{P_{\text{ПАД}}}=\left|S_{12}\right|^2=\frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_1+\beta_2)^2}\cdot\frac{1}{1+4Q_{\text{Н}}^2\delta_\omega^2}. \qquad (8.12)$$

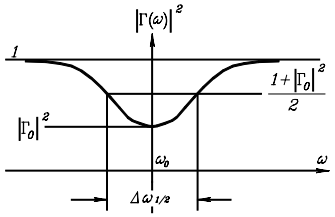
Здесь $Q_{\text{Н}}=\dfrac{Q_0}{1+\beta_1+\beta_2}$ – нагруженная добротность такого резонатора.

При одной связи резонатора с измерительной линией имеем $\beta_1=\beta$,

$$\beta_2=0,\quad Q_{\text{Н}}=\frac{Q_0}{1+\beta},\quad |\Gamma(\omega)|^2=\frac{P_{\text{ОТР}}}{P_{\text{ПАД}}}=\frac{\left(\dfrac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2+4Q_{\text{Н}}^2\delta_\omega^2}{1+4Q_{\text{Н}}^2\delta_\omega^2}. \qquad (8.13)$$

Вдали от резонансной частоты $|\Gamma|^2=1$. На резонансной частоте

$$|\Gamma(\omega)|^2\Big|_{\delta_\omega=0}=|\Gamma_0|^2=\frac{(1-\beta)^2}{(1+\beta)^2}. \qquad (8.14)$$



Нагруженную добротность резонатора обычно измеряют по ширине резонансной кривой $\Delta\omega_{1/2}$ на частотах расстройки $\omega_{1,2}=\omega_0\pm\dfrac{\Delta\omega_{1/2}}{2}$, на которых квадрат

модуля коэффициента отражения равен

$$\left|\Gamma\left(\omega_{1,2}\right)\right|^2 = \frac{1+\left|\Gamma_0\right|^2}{2} \qquad (8.15)$$

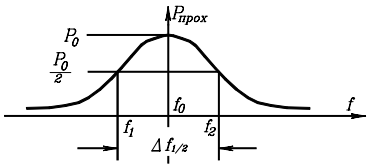
(см. рис.), при этом $Q_H = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega_{1/2}}$. Из выражения для коэффициента отражения на резонансной частоте и определения коэффициента стоячей волны (КСВн) следует, что коэффициент связи β можно определить по измерению КСВн на резонансной частоте:

$$\beta = \begin{cases} \text{КСВн} & \text{при } \beta > 1 \text{ (режим пересвязи)} \\ 1/\text{КСВн} & \text{при } \beta < 1 \text{ (режим недосвязи)} \end{cases}.$$

Пересвязан или недосвязан резонатор с подводящей линией, можно определить по внесению в резонатор в область с электрическим полем малого поглощающего тела (например, графитового стержня). Если резонатор пересвязан (большое отверстие связи или петля связи), то в отраженной волне большую часть составляет волна, выходящая из резонатора. Тогда если в резонатор внести дополнительное поглощение, то амплитуда этой волны уменьшится и, как следствие, улучшится согласование резонатора с подводящим трактом (отраженный от резонатора сигнал уменьшится). И наоборот – внесение дополнительного поглощения в недосвязанный резонатор ухудшает согласование (отраженный сигнал становится больше).

Для резонатора с двумя *симметричными* элементами связи имеем $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $Q_{\text{Н}} = \dfrac{Q_0}{1+2\beta}$,

$$\frac{P_0}{P_{\text{ПАД}}} = \left| S_{12} \right|^2 = \frac{4\beta^2}{(1+2\beta)^2} \cdot \frac{1}{1+4Q_{\text{Н}}^2\delta_\omega^2}.$$



Здесь *прошедшая* через резонатор мощность обозначена P_0. Переходное ослабление резонатора на резонансной частоте есть

$$A = \left.\frac{P_0}{P_{\text{ПАД}}}\right|_{f=f_0} = \frac{4\beta^2}{(1+2\beta)^2}. \qquad (8.16)$$

Тогда собственная добротность резонатора с двумя симметричными элементами связи может быть рассчитана по формуле

$$Q_0 = Q_{\text{Н}}(1+2\beta) = \frac{Q_{\text{Н}}}{1-\sqrt{A}}. \qquad (8.17)$$

Нагруженную добротность измеряют по резонансной частоте f_0 и двум

частотам расстройки f_1 и f_2, для которых проходящая через резонатор мощность уменьшается в два раза (см. рис.):

$$Q_{\text{Н}} = \frac{f_0}{\Delta f_{1/2}} = \frac{f_0}{|f_2 - f_1|}.$$

Для расчета коэффициента затухания $\alpha_{\text{Е}}$ ускоряющих систем на бегущей волне необходимо знание *волноводной* добротности $Q_{\text{В}}$, которая пропорциональна отношению мощности потерь в стенках структуры к запасенной энергии.

$$Q_{\text{В}} = \frac{\omega W}{P_{\text{УС}}}$$

В резонансном макете появляются две дополнительные боковые стенки, в которых тоже есть потери. То есть полная мощность потерь в резонансном макете есть сумма потерь в стенках УС $P_{\text{УС}}$ плюс потери в двух боковых стенках $2P_{\text{Б}}$. Для резонансного макета КДВ, в котором боковые стенки проходят посередине металлической диафрагмы, различия между волноводной добротностью и собственной добротностью резонансного макета будут незначительны – металлизированными оказываются только отверстия связи, где поверхностные токи малы. В макете, где боковые стенки проходят посередине ячейки, это отличие может быть (в зависимости от вида колебания) значительным.

Для правильного определения волноводной добротности поступают следующим образом. Измеряют собственную добротность резонансного макета длиной L

$$Q_L = \frac{\omega W_L}{P_L + 2P_{\text{Б}}}, \tag{8.18}$$

где $P_L = P_{\text{УС}}$ – мощность потерь в стенках УС макета длиной L. Далее измеряют собственную добротность макета длиной $2L$. Запасенная энергия в таком макете будет равна $W_{2L} = 2W_L$. Мощность потерь в стенках УС тоже удвоится $P_{2L} = 2P_L$. А мощность потерь в боковых стенках останется прежней. Тогда собственная добротность образованного макета длиной $2L$ будет равна

$$Q_{2L} = \frac{2\omega W_L}{2P_L + 2P_{\text{Б}}}. \tag{8.19}$$

Из полученных выражений, исключая мощность потерь в боковых стенках, можно вычислить волноводную добротность

$$Q_{\text{В}} = \frac{Q_L Q_{2L}}{2Q_L - Q_{2L}} \,. \qquad (8.20)$$

Измерение напряженности поля

Напряженности электрического и магнитного полей можно найти по измерениям в режиме стоячих волн (резонансный макет) и по измерению в бегущем режиме. Измерения на резонансных макетах обеспечивают высокую точность и сравнительно просто реализовываются.

Для исследования полей в резонансных макетах наиболее часто применяется метод малых возмущений. В основе этого метода лежит соотношение, получаемое из теории малых возмущений, которое устанавливает связь между относительным изменением резонансной частоты резонатора и напряженностью полей в месте расположения малого возмущающего тела. Например, для металлического тела

$$\frac{\delta f}{f_0} = \frac{\int\limits_{\Delta V} \left(\mu_0 \left|\vec{H}\right|^2 - \varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2 \right) dV}{2\int\limits_{V} \varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2 dV} \,, \qquad (8.21)$$

где ΔV – объем, занимаемый металлическим возмущающим телом,

V – полный объем резонатора.

Для малых возмущающих тел вводят понятие коэффициента поляризации, и в его обозначениях теорема о малых возмущениях записывается

$$\frac{\delta f}{f_0} = -\frac{\vec{M} \cdot \vec{H} + \vec{P} \cdot \vec{E}}{W} \,, \qquad (8.22)$$

где $\vec{M}$ – вектор магнитной поляризации,

$\vec{P}$ – вектор электрической поляризации,

W – полная запасенная энергия в резонаторе.

Векторы поляризации можно рассчитать в статическом приближении, и их выражение зависит от формы и материала изготовления возмущающего тела. Для *металлического* шарика радиусом a

$$P_x = P_y = P_z = \varepsilon_0 4\pi\, a^3 E_{x,y,z} \,,$$

$$M_x = M_y = M_z = -\mu_0 4\pi\, a^3 H_{x,y,z} \,.$$

Для непроводящего шарика радиусом a с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ

$$P_x = P_y = P_z = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\varepsilon_0 4\pi\, a^3 E_{x,y,z},$$

$$M_x = M_y = M_z = \frac{\mu - \mu_0}{\mu - 2\mu_0}\mu_0 4\pi\, a^3 H_{x,y,z}.$$

В общем случае свойства зонда определяются его геометрической формой, размерами, материалом и ориентацией относительно направлений силовых линий поля.

Для определения составляющих напряженности электрических полей используют диэлектрические и металлические возмущающие тела в виде шариков, дисков или игл. Металлическая игла более удобна, так как вызываемое ей возмущение в несколько раз больше, чем диэлектрической. Однако при этом следует учесть, что она реагирует и на магнитное поле, перпендикулярное ее оси. Для измерения напряженности магнитного поля применяют металлические диски. Если же в месте измерения присутствуют и электрическое, и магнитное поля, то сначала измеряют диэлектрическим возмущающим телом напряженность только электрического поля, затем металлическим телом измеряют суммарный сдвиг частоты и производят вычитание эффекта сдвига электрическим полем.

При исследовании структур со слабыми электрическими полями используется так называемый “бисерный зонд”, представляющий собой несколько одинаковых возмущающих тел, надетых на одну нить с периодом $\lambda_g/2$. В этом случае возмущающие тела располагаются в местах с одинаковой напряженностью электрического поля и вызываемая ими расстройка суммируется. Этот метод применяют также, если чувствительность установки недостаточна для регистрации возмущения, вызываемого одиночным зондом.

Методика измерения ускоряющих полей, например, в КДВ, состоит в протягивании возмущающего тела, закрепленного на тонкой нити, по оси ускоряющей структуры. При этом снимается зависимость сдвига резонансной частоты от координаты расположения тела. Сдвиг резонансной частоты можно измерять двумя методами. В первом методе осуществляется автоподстройка частоты генератора под изменяющуюся частоту резонатора. Тогда сдвиг частоты измеряется непосредственно по частотомеру. Во втором методе частота генератора выставляется на середину склона резонансной кривой и поддерживается постоянной. Тогда при протягивании возмущающего тела будет происходить изменение амплитуды измеряемого сигнала. Если изменения резонансной частоты малы, то сигнал будет пропорционален изменению частоты резонатора.

Итак, в резонансном макете длиной L (период УС – d) каким-либо

способом была снята зависимость изменения резонансной частоты $\delta f(z)$ при протягивании малого возмущающего тела по оси макета. По теории малого возмущения

$$\frac{\delta f(z)}{f_0} = \alpha \frac{E_{\text{ст}}^2(z)}{W_{\text{ст}}}, \tag{8.23}$$

где α – коэффициент, зависящий от формы и материала возмущающего тела (считаем, что на оси резонансного макета есть только E_z - составляющая электрического поля),

$W_{\text{ст}}$ – полная запасенная энергия в резонансном макете.

Нижний индекс подчеркивает, что эти величины относятся к режиму стоячих волн в резонансном макете.

Из определения шунтового сопротивления n-й пространственной гармоники имеем

$$R_{sh\,n} = \frac{E_{n\,б}^2}{2\alpha_E P_б} = \frac{E_{\text{б макс}}^2 \cdot \varepsilon_n^2}{2\alpha_E P_б}, \tag{8.24}$$

где $E_{\text{б макс}}$ – максимальная амплитуда бегущей волны,

$\varepsilon_n = \dfrac{E_{n\,б}}{E_{\text{б макс}}}$ – относительная амплитуда n-й гармоники в бегущем режиме,

$P_б$ – мощность ВЧ-поля в УС в бегущем режиме.

Мощность $P_б$ в бегущем режиме для отрезка структуры длиной L равна

$$P_б = c\beta_{\text{гр}} \frac{W_б}{L}, \tag{8.25}$$

где $W_б$ – полная запасенная энергия электромагнитной волны на длине L в бегущем режиме. Так как в резонансном макете в режиме стоячих волн максимальная амплитуда стоячей волны в два раза больше, чем максимальная амплитуда бегущей волны $E_{\text{ст макс}} = 2E_{\text{б макс}}$, а полная запасенная энергия $W_{\text{ст}} = 2W_{\text{б}}$, то с учетом определения коэффициента затухания α_{E} получим

$$R_{sh\,n} = \frac{E_{n\,б}^2}{2\alpha_E P_б} = \frac{E_{\text{ст макс}}^2}{W_{\text{ст}}} \cdot \frac{\varepsilon_n^2 Q_{\text{В}} L\,\lambda}{4\pi\,c}. \tag{8.26}$$

По результатам измерений малым возмущающим телом для определения отношения $E_{\text{ст мах}}^2 / W_{\text{ст}}$ в резонансном макете необходимо знать коэффициент α. Его определяют также методом возмущений, но в резонаторе,

распределение поля в котором имеет точное аналитическое выражение. Обычно в качестве такого эталонного резонатора используется цилиндрический резонатор с колебанием вида E_{010}, возбуждаемый примерно на той же частоте (чтобы исключить частотную зависимость материала изготовления возмущающего тела). Для эталонного цилиндрического резонатора радиуса $R_Э$ и высотой $H_Э$ имеем:

$$\frac{\delta f_Э}{f_{0Э}} = \alpha \frac{E_{zЭ}^2}{W_Э} = \alpha \frac{2}{\pi \varepsilon_0 R^2 H J_1^2\left(\nu_{01}^E\right)}. \qquad (8.27)$$

С учетом этого окончательная расчетная формула для определения шунтового сопротивления запишется

$$R_{sh\,n} = \frac{E_{n\,б}^2}{2\alpha_E P_б} = \frac{60}{\pi J_1^2\left(\nu_{01}^E\right)} \cdot \frac{\varepsilon_n^2 Q_В L \lambda}{H_Э R_Э^2} \cdot \frac{\delta f_{макс}}{f_0} \cdot \frac{f_{0Э}}{\delta f_Э} \text{ [Ом/м]}, \qquad (8.28)$$

здесь $\delta f_{макс}$ – максимальный сдвиг частоты при снятии эпюры распределения поля в исследуемом резонансном макете.

В бегущем режиме распределение электрического поля на оси есть

$$E_z(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n\, e^{-j\beta_n z} = E_{б\,макс} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n\, e^{-j\beta_n z}\ . \qquad (8.29)$$

В резонансном макете

$$E_{ст}(z) = 2E_{б\,макс} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n \cos\beta_n z = E_{ст\,макс} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n \cos\beta_n z\ . \qquad (8.30)$$

Отсюда относительную амплитуду n-й пространственной гармоники можно определить из распределения поля в резонансном макете

$$\varepsilon_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{E_{ст}(z)}{E_{ст\,макс}} \cdot \cos\left(\beta_n z\right) dz\ , \qquad (8.31)$$

где L – длина макета, $\beta_n = \dfrac{\theta + 2\pi n}{d}$ – волновое число n-й пространственной гармоники.

Чтобы посчитать ε_n, необходимо знать распределение $E_{ст}(z)$. Для этого из полученного методом малого возмущающего тела распределения $E_{ст}^2(z)$ нужно не только извлечь квадратный корень, но и правильно расставить знаки $\pm$ в этом распределении. В этом могут помочь полученные ранее выражения для полей в центрах ячеек резонансных макетов для двух случаев расположения боковых стенок при различных видах колебания. При-

чем видно, что для одного и того же вида колебания в различных макетах распределения полей различны. Для примера на рисунке 8.2 приведены распределения полей на виде колебания $\pi/2$ для двух макетов КДВ, состоящих из четырех полных ячеек, но с разным расположением закорачивающих боковых стенок. Причем поля эскизно нарисованы для случая малого отверстия связи, когда поле в ячейках примерно постоянно.

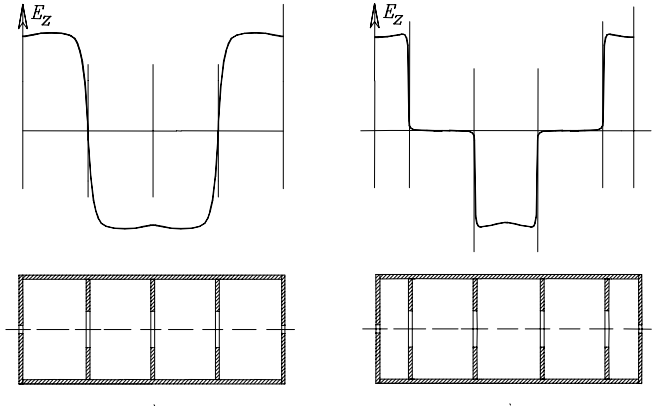


Рис. 8.2. Распределения электрического поля на виде колебания $\pi/2$ для случаев различного расположения боковых стенок

Пользуясь выражениями в центрах ячеек, можно представить аналогичные распределения электрического поля и для других видов колебаний. В реальных макетах при большом отверстии связи “сглаживание” полей вблизи диафрагм увеличиваются. Более того, в макетах, где резонансным элементом является штырь, электрическое поле при увеличении расстояния между штырями начинает “прижиматься” к штырю, и появляются “провалы” в середине ячейки. На следующих рисунках 8.3 приведены распределения электрических полей, полученные экспериментально на различных видах колебания в резонансном макете из шести полных ячеек со штыревым резонансным элементом. В левом столбце представлены распределения $E_z^2(z)$, а в правом – соответствующие им распределения $E_z(z)$. Сплошной линией нарисованы распределения для макетов с малым периодом, а пунктирной линией – с большим. Видно, что при большом периоде поля начинают прижиматься к штырям. При этом уменьшается амплитуда основной пространственной гармоники и возрастают амплитуды высших гармоник.

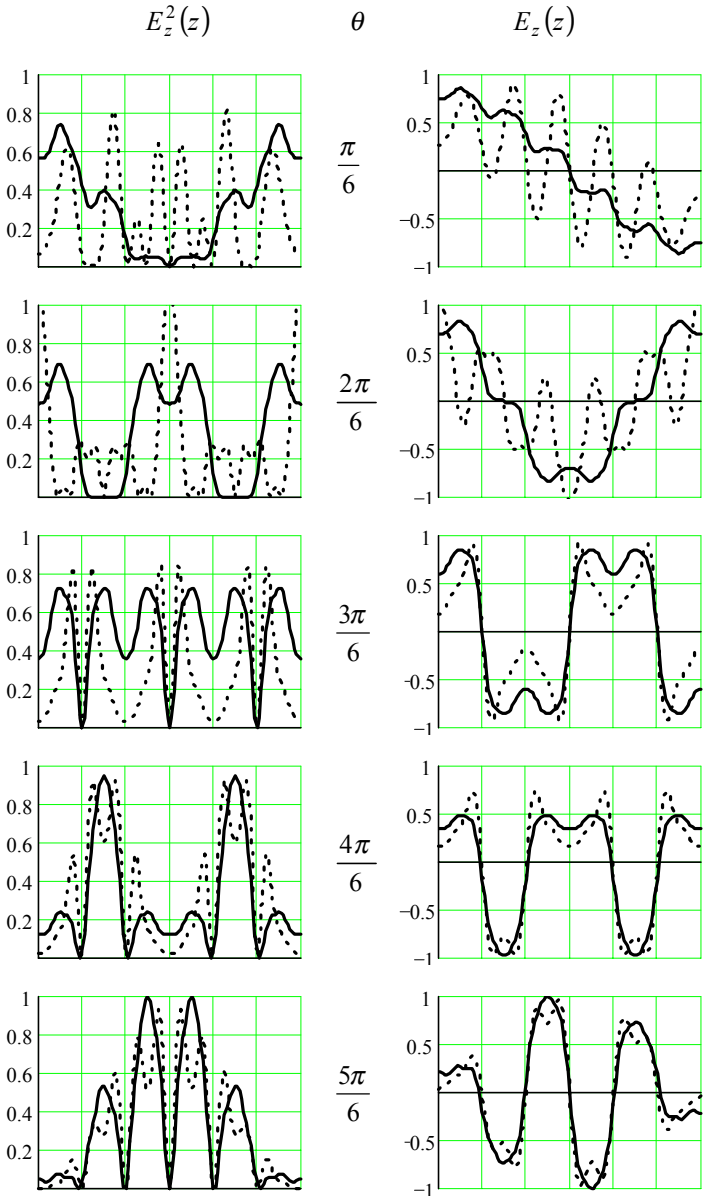


Рис.8.3. Распределение $E_z^2(z)$ и $E_z(z)$ для различных видов колебаний θ в резонансном макете из 6 ячеек

К примеру, на виде колебания $\theta = 4\pi/6 \equiv 2\pi/3$ относительные амплитуды пространственных гармоник равны:

$\theta = 2\pi/3$ ε_n	Для малого периода (сплошная линия)	Для большого периода (пунктирная линия)
ε_{-2}	-0,035	-0,150
ε_{-1}	-0,370	-0,516
ε_0	0,681	0,578
ε_{+1}	0,060	0,210
ε_{+2}	0,019	0,039

Метод нерезонансных возмущений

Методом резонансного макета можно измерить характеристики ускоряющей структуры, относящиеся только к “энергетическим срезам” ускорителя с постоянной фазовой скоростью, с постоянной длиной периода ячейки. В ускорителях с изменяющейся скоростью, например, в протонных ускорителях, или в начальной части электронного ускорителя таких “срезов” надо сделать несколько. Причем чем резче изменение фазовой скорости вдоль ускорителя, тем больше резонансных макетов необходимо исследовать для получения гладких зависимостей. По полученным “энергетическим срезам” строятся плавные зависимости геометрических размеров ускорителя и его электродинамических характеристик. По ним и изготавливается ускоритель в целом.

Однако когда такой ускоритель изготовлен, необходимо посмотреть, какие у него характеристики в рабочем, бегущем режиме. Для этого применяют метод нерезонансных возмущений, который позволяет исследовать ускоряющие структуры и другие согласующиеся узлы, в том числе трансформаторы типа волны, в бегущем режиме.

Основу метода составляет зависимость изменения коэффициента отражения в однородном подводящем тракте $\Delta\dot{\Gamma}$ от суммы квадратов компонентов электромагнитного поля при помещении в систему малого возмущающего тела

$$\Delta\dot{\Gamma} = -\frac{j\omega}{P_\Gamma} \cdot \left[\sum_{i=1}^{3} \left(k_{1i} \cdot \dot{E}_i^2 - k_{2i} \cdot \dot{H}_i^2 + \gamma_i \cdot \dot{E}_i^2 \right) \right], \qquad (8.32)$$

где P_Γ – мощность генератора, ω – круговая частота,

k_{1i}, k_{2i}, γ_i – коэффициенты, зависящие от формы, материала, размеров возмущающего тела и его ориентации относительно поля,

$\dot{E}_i$ и $\dot{H}_i$ – комплексные амплитуды проекций полей на i-й орт.

Формула справедлива как для волноводных систем, так и для резонаторных. Для металлических возмущающих тел $\gamma_i = 0$, а для диэлектрических – характеризует потери ВЧ-мощности в возмущающем теле. Коэффициенты k_{1i}, k_{2i} и γ_i можно определить калибровкой в волноводе с известной конфигурацией полей. Обычно для этого используются прямоугольные волноводы с H_{10} - волной. В простых полях, например, на оси КДВ для измерения электрического поля используют металлические иглы или диэлектрические шарики, не вносящие потерь. Для них зависимость изменения коэффициента отражения может быть переписана в виде

$$\Delta\dot{\Gamma} = -a' j\omega \cdot \vec{E}^2 , \tag{8.33}$$

где a' – полный форм-фактор зонда.

Электрическое поле E_z на оси ускоряющей структуры можно представить в виде

$$\dot{E}(z) = \left| E(z) \right| \cdot e^{j\varphi(z)}, \tag{8.34}$$

где модуль электрического поля в точке нахождения возмущающего тела пропорционален корню квадратному из модуля изменяющегося коэффициента отражения, а фаза электрического поля равна половине величины фазы коэффициента отражения.

$$\dot{E}(z) \sim \sqrt{\left| \Gamma(z) \right|} \cdot e^{i\frac{1}{2}\arg[\Gamma(z)]} . \tag{8.35}$$

При измерении в бегущем режиме наиболее интересны именно волноводные свойства УС – распределение относительных амплитуд и фаз электрического поля вдоль УС, коэффициент отражения, как общий для всей УС, так и локальных отражений, связанных либо с дефектами изготовления, либо с заложенными в конструкцию ускорителя резко меняющимися параметрами (скачки фаз или амплитуд). Анализ этих характеристик можно провести так называемым трехячеечным методом. Ячейки группируют по три вместе последовательно. Предполагается, что в месте расположения этих трех ячеек амплитуды падающей и отраженной волн, распространяющихся по УС, меняются незначительно. Кроме того, предполагается, что изменение фазы при переходе от ячейки к ячейке тоже не меняется. Методика сводится к следующему. По двум соседним минимумам в полученном распределении $\left| E(z) \right|$ определим центр i-й ячейки z_i. Нормированное электрическое поле в этой точке есть

$$E_i = \sqrt{\left|\Gamma(z_i)\right|} \cdot e^{i\frac{1}{2}\arg[\Gamma(z_i)]}. \qquad (8.36)$$

Представим поля в $i-1$, i и $i+1$ ячейках в виде суммы падающей T и отраженной R волн.

$$\begin{aligned} E_{i-1} &= T \cdot e^{j\theta^-} + R \cdot e^{-j\theta^-}, \\ E_i &= T + R, \\ E_{i+1} &= T \cdot e^{-j\theta^+} + R \cdot e^{j\theta^+}, \end{aligned} \qquad (8.37)$$

где θ^- – изменение фазы при переходе от $i-1$ - й точке к i - й,

θ^+ – изменение фазы при переходе от i - й точке к $i+1$ - й.

Имеем три комплексных уравнения относительно шести неизвестных $|T|$, $\arg T$, $|R|$, $\arg R$, θ^- и θ^+. Решая их можно найти полные комплексные величины падающей волны T, отраженной волны R и изменения фаз θ^- и θ^+ для i - й ячейки. Беря следующие три ячейки – i, $i+1$ и $i+2$ и повторяя приведенные вычисления, найдем величины падающей волны, отраженной волны и изменения фаз для $i+1$ - й ячейки.

На рисунке 8.4 для примера приведена осциллограмма, содержащая распределение квадрата амплитуды $E_z^2(z)$ и удвоенной фазы напряженности поля $2\arg[E_z(z)]$ на виде колебания $\pi/2$.

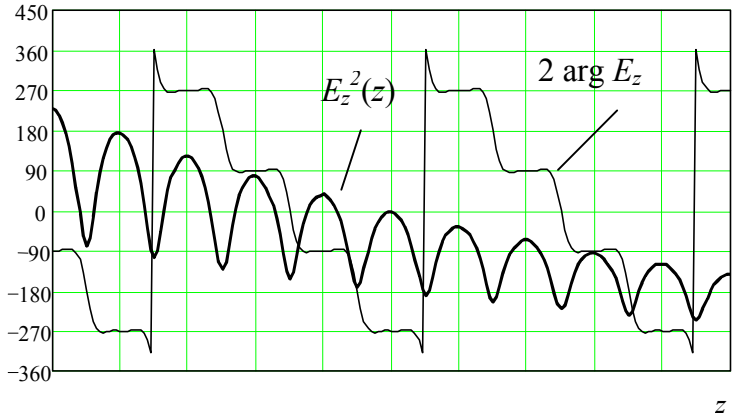


Рис. 8.4. Осциллограмма распределения квадрата амплитуды $E_z^2(z)$ и удвоенной фазы напряженности поля $2\arg[E_z(z)]$ на виде колебания $\pi/2$

Глава 9

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ УСКОРЯЮЩИХ СТРУКТУР

При выборе темпа ускорения и, следовательно, значения напряженности ускоряющего электрического поля необходимо учитывать электрическую прочность ускоряющей структуры, ограниченную электрическим пробоем.

Высокочастотный пробой

ВЧ-пробой имеет много общего с высоковольтными пробоями в вакууме при постоянном и импульсном напряжениях. Уровень электропрочности при ВЧ-напряжении метрового диапазона мало отличается от того, что наблюдается при постоянном и импульсном напряжении, хотя определенная специфика имеется. В то же время при высокочастотном напряжении существуют свои, специфические формы разряда, не имеющие аналога при постоянном и импульсном напряжениях. В 1953 г. Килпатрик выдвинул полуэмпирический критерий возникновения пробоя: в случае, когда самый легкий ион (протон) за один полупериод не успевает пересечь межэлектродный зазор ($s > 4{,}85 \cdot 10^6 E_{ВЧ} / f^2$), этот критерий можно преобразовать в вид

$$E_{ВЧ}^2 \cdot f^{-1} \cdot \exp\left(-8{,}5 \cdot 10^6 / E_{ВЧ}\right) \geq 6 \cdot 10^5 \ \text{(В/м)}^2\text{/с}. \qquad (9.1)$$

<u>*Пример*</u>: Для линейных ускорителей электронов, работающих на частоте $f \approx 3$ ГГц, максимальная напряженность электрического поля по критерию Киллпатрика составляет примерно $E \approx 44$ МВ/м

Этот критерий был подобран на основе экспериментальных данных. Однако в последнее время появился ряд публикаций, в которых отмечается, что при тщательной обработке поверхности электродов удалось получить напряженность $E_{ВЧ}$, существенно превышающую критерий Килпатрика. Например, в том же десятисантиметровом диапазоне волн была получена напряженность ускоряющего поля ~ 100 МВ/м

Вторично-электронный резонансный разряд (ВЭРР)

Вторично-электронный резонансный разряд (ВЭРР), или мультипакторный, представляет собой специфический ВЧ-разряд, не имеющий аналогов при постоянном и импульсном напряжениях. Механизм ВЭРР следующий:

электроны, вышедшие из электрода, когда он является катодом, ускоряются высокочастотным напряжением и, попадая на противоположный электрод, вызывают вторичную эмиссию. Если время пролета первичных электронов близко к длительности любого нечетного числа полупериодов ВЧ-напряжения $(2n_p - 1)$, то вторичные электроны, вылетая из второго электрода, который к этому времени станет катодом, также ускорятся и вызовут вторичную электронную эмиссию уже из первого электрода. Число $n_p = 1,2,3...$ называется модой ВЭРР. При коэффициенте вторичной эмиссии $K_Э > 1$ такой взаимный обмен электронами (который и называется ВЭРР) приведет к появлению тока между электродами. Разряд может существовать, если конечная скорость электрона v_k находится внутри некоторого диапазона скоростей $v_{k1} - v_{k2}$, где коэффициент $K_Э > 1$. Энергию электрона, когда его скорость равна v_{k1} или v_{k2}, принято называть соответственно первым и вторым критическими потенциалами eU_{k1} и eU_{k2}. Для большинства используемых материалов, не подвергавшихся специальной обработке, $eU_{k1} = 20 \div 50$ эВ и $eU_{k2} = 1500 \div 10000$ эВ.

Уравнение движения заряженной частицы в ВЧ-поле имеет вид

$$m\ddot{x} = eE_{ВЧ}\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (9.2)$$

Откуда скорость и расстояние определяются выражениями

$$v(t) = v_0 + \frac{eE_{ВЧ}}{m\omega} \cdot [\cos\varphi_0 - \cos(\omega t + \varphi_0)], \qquad (9.3)$$

$$x(t) = v_0 t + \frac{eE_{ВЧ}}{m\omega^2} \cdot [\omega t \cdot \cos\varphi_0 - \sin(\omega t + \varphi_0)],$$

где v_0 – начальная скорость частицы, φ_0 – фаза ВЧ-напряжения в момент начала движения частицы. Исходя из того, что время пролета электрона между электродами должно составлять нечетное число полупериодов ВЧ-напряжения, можно записать уравнения, определяющие напряженность $E_{ВЧ}$ и скорость электрона при соударении с противоположным электродом v_k, при расстоянии между электродами s:

$$E_{ВЧ} = \frac{m}{e} \cdot \frac{\omega^2 s - (2n_p - 1)\pi\,\omega\, v_0}{\pi(2n_p - 1)\cos\varphi_0 + 2\sin\varphi_0}, \qquad v_k = v_0 + 2 \cdot \frac{eE_{ВЧ}}{m\omega}\cos\varphi_0. \qquad (9.4)$$

Реальные начальные энергии вторичных электронов имеют широкий спектр - от нуля до энергии первичных электронов. В элементарной теории для упрощения принято постоянство отношения начальной скорости электрона к конечной ($v_0 / v_k = k_v = const$). Тогда уравнения

можно переписать как

$$E_{ВЧ} = \frac{m}{e}\omega^2 s \cdot G \quad \text{и} \quad v_k = \omega s \cdot \frac{2\cos\varphi_0}{1 - k_v} \cdot G, \qquad (9.5)$$

где $G = \left[(2n_p - 1) \cdot \pi \cdot \frac{1 + k_v}{1 - k_v} \cdot \cos\varphi_0 + 2\sin\varphi_0 \right]^{-1}$ – коэффициент, зависящий от φ_0. Как показывают проведенные исследования, лучшее совпадение с результатами экспериментов дает значение $k_v \approx 0{,}1 \div 0{,}25$. Зависимость $G(\varphi_0)$ немонотонна, и при некотором значении $\varphi_0 = \varphi_{01}$ коэффициент G минимален. Этому минимуму и соответствует минимальное значение $E_{ВЧ}$, при котором может возникнуть мультипакторный разряд. Для $k_v = 0{,}25$ $\varphi_{01} = 21^{\circ}$ и $\varphi_{01} = 7{,}3^{\circ}$ для $n_p = 1$ и $n_p = 2$ соответственно.

При увеличении напряженности $E_{ВЧ}$ сверх минимальной разряд не прекращается, а обмен электронами происходит при меньших углах вылета φ_0. Минимальное значение φ_0 и, следовательно, максимальное напряжение, при котором может существовать разряд, определяется условием: вылетевший электрон не возвращается на тот же электрод. При $k_v = 0{,}25$ минимальный угол $\varphi_{02} = -53^{\circ}$. Поэтому разряд может существовать только в ограниченной сверху и снизу области значений углов $\varphi_{02} \div \varphi_{01}$. Причем почти во всей указанной области углов разряд устойчив, т. е. имеются условия фазовой фокусировки, обеспечивающие стабильность фазы вылета электрона φ_0. Так как коэффициент вторичной эмиссии $K_Э > 1$ только в определенном интервале конечных скоростей электронов v_k, то ВЭРР возможен лишь в ограниченной области значений произведения $\omega \cdot s$, и существует значение этого произведения, ниже которого ВЭРР не происходит. На рисунке 9.1 показаны области существования ВЭРР при $k_v = 0{,}25$ и $n_p = 1$ и $n_p = 2$, пунктир – результаты эксперимента. На этом же рисунке уже видно, что разряды с более высокой модой n_p имеют более узкие области существования.

Пример: Середина первой зоны ВЭРР при $n = 1$ соответствует примерно значению $f \cdot s \approx 0{,}3 \cdot 10^3$ МГц·см и $U \approx 10^3$ В. При рабочей частоте $f = 3$ ГГц получим, что наиболее опасными на этой частоте являются зазоры с $s \approx 0{,}1$ см = 1 мм и напряженностями электрических полей $E \approx 10$ кВ/см, что в три раза ниже пре-

дельной напряженности электрического поля в сухом воздухе – 30 кВ/см.

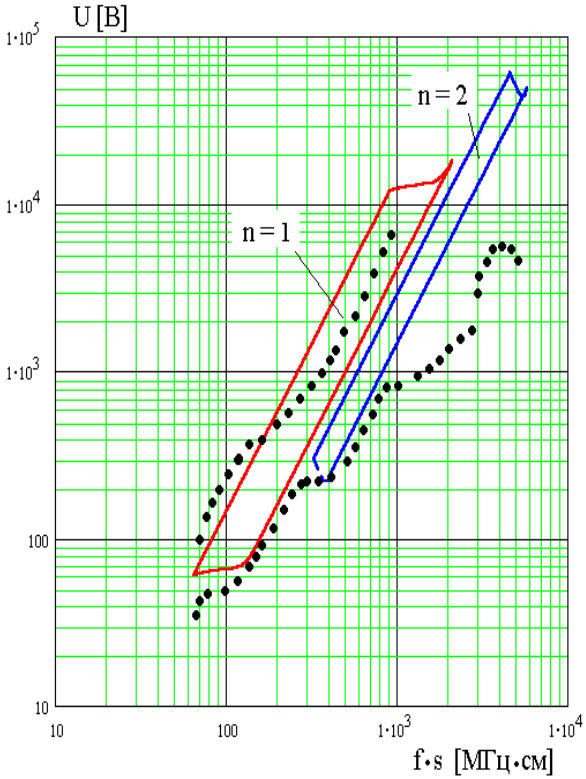


Рис. 9.1. Первая и вторая области существования ВЭРР

Коэффициент перенапряженности поля

Возникновение высоковольтных разрядов и ВЧ-пробоев в очень сильной степени зависит от состояния поверхности (наличия микроострий и их размера), а также толщины и состава диэлектрических пленок на поверхности. Электрическое поле на микроострия – $\beta \cdot E_S$, где E_S – электрическое поле на поверхности, а β – коэффициент увеличения действующей

локальной напряженности поля. В свою очередь $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2$, где коэффициент $\beta_1 = 2 \div 4$ определяется самими микронеровностями на поверхности, а $\beta_2 = 10 \div 20$ и зависит от диэлектрических пленок на поверхности.

Однако помимо этих чисто технологических причин само максимальное электрическое поле в ускоряющей структуре $E_{S\max}$ зависит от выбранной геометрии структуры. В резонаторных ускорителях с трубками дрейфа напряженность электрического поля максимальна на поверхности трубок дрейфа. Наиболее велика она на периферийных участках торцевых поверхностей трубок дрейфа и сильно зависит от радиусов закругления и отношения длины ускоряющего зазора к диаметру трубки дрейфа. Зависимость максимальной напряженности поля на поверхности трубок дрейфа $E_{S\max}$ от отношения $2b/d$ при различных радиусах закруглений показана на рисунке 9.2.

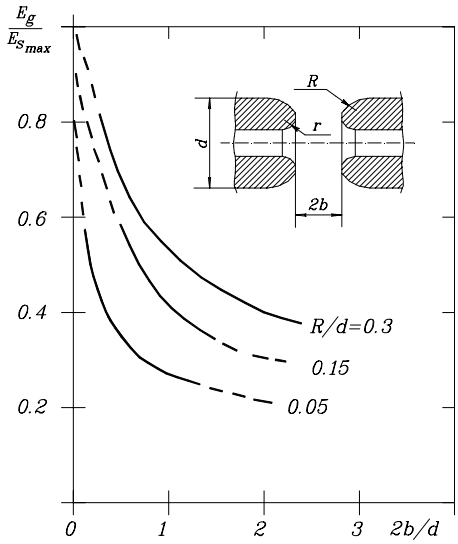


Рис. 9.2. Зависимость максимальной напряженности поля на поверхности трубок дрейфа $E_{S\max}$ ($2b/d$)

Видно, что при больших значениях $2b/d$ напряженность поля на поверхности в 2–3 раза превышает среднюю напряженность поля в зазоре E_g да-

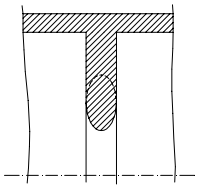
же при больших радиусах закруглений. В области малых зазоров $E_{S\max}$ в основном зависит от отношения R/b, особенно при $R < 0{,}5 \cdot b$.

В волноводных ускорителях ускорение заряженных частиц происходит в поле одной рабочей пространственной гармоники E_A. Коэффициентом перенапряженности поля $k_П$ называют отношение максимального электрического поля в ускоряющей структуре $E_{S\max}$ к амплитуде рабочей пространственной гармоники электрического поля E_A. Естественно, это определение относится и к резонаторным ускорителям, так как поле стоячей волны всегда можно представить как сумму двух волн, распространяющихся навстречу друг другу, а заряженная частица ускоряется только синфазной волной.

Ранее, при рассмотрении круглого диафрагмированного волновода с малым отверстием связи, предполагалось, что электрическое поле в зазоре E_t постоянно и не зависит от радиуса в пределах отверстия связи. Во всем же резонаторе электрическое поле распределено по радиусу как в E_{010} - резонаторе, т. е. как функция Бесселя $E_z(r) = E_t \cdot J_0\left(\nu_{01}^E r/b\right)$. В таком приближении $E_{S\max} = E_t$. Для такого поля, как было показано ранее, коэффициент перенапряженности есть

$$k_П = \frac{E_{S\,max}}{E_A} = \frac{E_t}{E_0} == \left.\frac{\theta/2}{sin(\theta/2)}\right|_{\theta = 2\pi/3} = 1{,}2 .$$

На самом деле даже при малом отверстии связи из-за наличия радиуса закругления отверстия диафрагмы максимальное поле на закруглении больше, чем на оси структуры. Зависимости величин коэффициента перенапряженности поля $k_П$ в круглом диафрагмированном волноводе (КДВ) от относительной величины радиуса отверстия в диафрагме a/b для видов колебаний $\pi/2$ и $2\pi/3$ при относительной толщине диафрагмы $t/\lambda = 0{,}038$ и $\beta_ф = 1$ приведены на рисунке 9.3. Для приведенных зависимостей отверстие в диафрагме закруглено радиусом $R = t/2$. Что касается зависимости $k_П$ от t/λ, то для КДВ с видами колебаний $\pi/2$ и $2\pi/3$ она имеет минимум в области t/λ от 0,07 до 0,09.



В ускоряющей структуре для форинжектора ВЭПП-5 (f=2856 МГц, $t/\lambda = 0{,}057$, a/b=0,306, $\theta = 2\pi/3$) проведенная оптимизация коэффициента перенапряженности показала, что $k_П$ можно сделать равным 1,7, если закругление имеет форму эллипса с соотношением осей 1:2 (см. рис.)

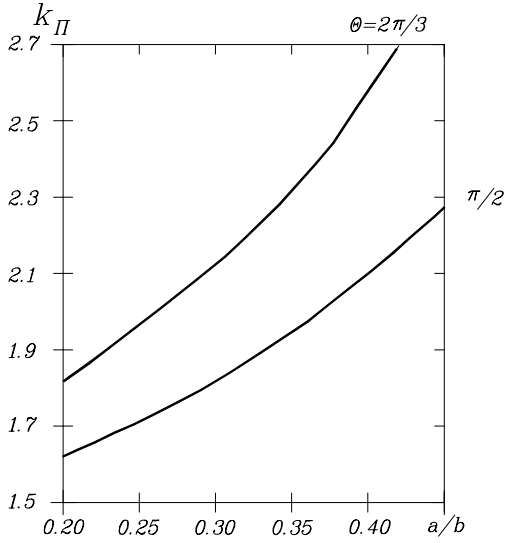


Рис. 9.3. Зависимость величины коэффициента перенапряженности $k_П$ в КДВ для видов колебаний $\theta = \pi / 2$ и $\theta = 2\pi / 3$

В заключение приведем американские и английские буквенные обозначения для диапазонов СВЧ, используемые в литературе как для волноводов, так и для ускоряющих структур.

Ам.	Англ.	Диапазон частот, ГГц	Диапазон длин волн, см
P	P	0,225 – 0,39	133,50 – 76,90
Lp-Lz	L	0,390 – 1,55	76,90 – 19,30
Se-Sh	S	1,550 – 3,90	19,30 – 7,69
C	C	3,900 – 6,20	7,69 – 4,84
Xd-Xk	X	6,200 – 10,90	4,84 – 2,75
Kp-Ku	J	10,900 – 17,25	2,75 – 1,74
Kt-Kl	K	17,250 – 33,00	1,74 – 0,91
Ka-Qe	Q	33,000 – 46,00	0,91 – 0,65
Va-Ve	V	46,000 – 56,00	0,65 – 0,54

Оглавление

Стр.

Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ УСКОРИТЕЛИ 3
Состав линейного ускорителя 3
Ускорители прямого действия 5
Ускорители трансформаторного типа 5
Ускорители с высоковольтным трансформатором 5
Ускорители с резонансным трансформатором 6
Каскадные ускорители 8
Генераторы импульсного напряжения (ГИН) 8
Каскадные генераторы 8
Электростатические ускорители (ЭСУ) 10
Линейные индукционные ускорители (ЛИУ) 12
Линейные резонансные ускорители 13
Волноводные линейные ускорители 15
Глава 2. ЗАМЕДЛЕННЫЕ ВОЛНЫ 16
Фазовая и групповая скорости 16
Набор энергии в волноводных ускоряющих системах 21
Глава 3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК УСКОРЯЮЩИХ СИСТЕМ 24
Цепочка связанных резонаторов 24
Расчет круглого диафрагмированного волновода с малым отверстием связи 26
Зависимости характеристик ускоряющих структур от частоты 29
Глава 4. ВОЗБУЖДЕНИЕ УСКОРЯЮЩИХ СТРУКТУР 31
УС с постоянным импедансом (CZ) 31
УС с постоянным градиентом (CG) 33
Глава 5. ВОЗБУЖДЕНИЕ СЕКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УМНОЖИТЕЛЯ МОЩНОСТИ SLED 35
Переходный процесс в одиночном резонаторе 35
Система умножения мощности SLED 43
Глава 6. УЧЕТ НАГРУЗКИ ТОКОМ 50
Учет нагрузки током в УС с бегущей волной (стационарный режим) 50
Структура с постоянным импедансом 51
Структура с постоянным градиентом 51
КПД ускорителя 53

Стр.

Фундаментальная теорема о нагрузке током
для резонатора 55
Учет нагрузки током в УС с бегущей волной
(нестационарный режим) 59
Энергетический спектр 63
Уменьшение энергетического спектра 66
Глава 7. УСКОРЯЮЩИЕ СТРУКТУРЫ
ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УСКОРИТЕЛЕЙ 69
Связанные объемные резонаторы 70
Щелевые элементы связи 75
Штыревые ускоряющие структуры 78
Резонаторы Н-типа 81
Глава 8. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСКОРЯЮЩИХ
СТРУКТУР 84
Метод резонансного макета 85
Измерение добротности и коэффициента затухания 87
Измерение напряженности поля 91
Метод нерезонансных возмущений 97
Глава 9. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ
УСКОРЯЮЩИХ СТРУКТУР 100
Высокочастотный пробой 100
Вторично-электронный резонансный разряд (ВЭРР) 100
Коэффициент перенапряженности поля 103