МИНИСТЕРСТВО
ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В.М. ПАВЛОВ

ЛИНЕЙНЫЕ УСКОРИТЕЛИ

Часть II

ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В ЛИНЕЙНЫХ УСКОРИТЕЛЯХ

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК
1999

УДК 621.384.64
ББК В381.1

Павлов В.М. Линейные ускорители: Часть II: Динамика частиц в линейных ускорителях: Учеб. пособие./Новосиб. ун-т. Новосибирск, 1999, 109 с.

Во второй части пособия представлены вопросы продольной динамики частиц в линейных ускорителях, поперечной динамики и вопросы фокусировки, динамика одиночного релятивистского сгустка – потенциалы возбуждения и импедансы.

Предназначено для студентов, аспирантов и научных сотрудников вузов, специализирующихся по физике ускорителей.

Рецензент – канд. физ.-мат. наук. П. В. Логачев

К изданию рекомендовано редакционно-издательским советом НГУ

© Новосибирский государственный университет, 1999

Глава 1

ПРОДОЛЬНАЯ ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В ЛИНЕЙНЫХ УСКОРИТЕЛЯХ

Уравнение движения заряженной частицы на оси структуры в поле бегущей волны без учета сил пространственного заряда есть

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = eE_0 \cos\varphi , \tag{1.1}$$

где E_0 - амплитуда пространственной гармоники, у которой фазовая скорость примерно равна скорости частицы. Фазовая скорость волны меняется с расстоянием для подстройки ее под скорость частицы. Поэтому фаза φ, характеризующая положение частицы относительно фазы волны, $\varphi = \omega \cdot \left(\int_0^z \frac{dz}{v_\phi} - t \right)$. Так как dz/dt - скорость частицы, то

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\cdot\pi}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{\beta_\Phi} - \frac{1}{\beta_e} \right). \tag{1.2}$$

Используя безразмерные переменные $\xi = z/\lambda$, $\gamma = \varepsilon / m_0 c^2$ и $G = eE_0\lambda / m_0 c^2$, перепишем уравнения движения:

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = G \cdot \cos\varphi ,$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{\beta_\phi} - \frac{1}{\beta_e} \right). \tag{1.3}$$

При описании продольного движения вводят понятие равновесной или синхронной частицы, скорость которой совпадает с изменяющейся фазовой скоростью волны. В принципе в ускорителе такой реальной частицы может и не быть. Для равновесной частицы по определению $\beta_s = \beta_e = \beta_\phi$. Учитывая, что $d\gamma / d\beta = \gamma^3 \beta$, можно получить закон изменения равновесной фазы в ускорителе

$$\cos\varphi_s = \beta_\phi \gamma_\phi^3 \cdot \left(d\beta_\phi / d\xi \right) / G . \tag{1.4}$$

Отсюда следует, что при любом изменении фазовой скорости вдоль ускорителя равновесная частица может существовать, если выполняется условие $\beta_\phi \gamma_\phi^3 \cdot \left(d\beta_\phi / d\xi \right) / G < 1$. То есть нельзя увеличивать фазовую скорость слишком быстро. Причем чем больше амплитуда ускоряющей гармони-

ки, тем быстрее можно увеличивать фазовую скорость волны. Для того чтобы равновесная частица ускорялась, ее фаза должна лежать в пределах

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_s < \frac{\pi}{2}. \qquad (1.5)$$

Так как для равновесной частицы относительная фаза $\varphi = const$, то ее движение в заданном поле волны довольно просто рассчитать. Поэтому будем рассматривать движение неравновесных частиц. Для них энергию удобно отсчитывать от равновесного значения γ_s:

$$\gamma' = \gamma - \gamma_s; \quad \frac{d\gamma'}{d\xi} = G \cdot (\cos\varphi - \cos\varphi_s). \qquad (1.6)$$

При рассмотрении движения частицы удобно использовать концепцию канонических переменных и связанных с ней понятий фазовой плоскости и фазовых траекторий, позволяющих обойтись без интегрирования уравнений движения. Одномерное, как в нашем случае, движение описывается обобщенной координатой Q и обобщенным импульсом P, канонически сопряженным координате Q. То есть предполагается, что уравнения движения могут быть записаны в гамильтоновой форме

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P},$$
$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q}, \qquad (1.7)$$

где функция $H(P,Q,t)$ - гамильтониан соответствующего одномерного движения. Состояние движения частицы в любой момент времени определяется ее координатой и импульсом. Пространство с координатными осями Q и P называется *фазовым пространством*. Каждая точка этого пространства отвечает определенному состоянию рассматриваемой системы. При движении системы изображающая ее фазовая точка описывает в фазовом пространстве линию, называемую *фазовой траекторией*. Если в гамильтониан движения не входит явно независимая переменная t, то тогда гамильтониан является интегралом движения:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H(Q,P) = const. \qquad (1.8)$$

Для фазового пространства часто используется теорема Лиувилля – при перемещении участка фазового пространства в соответствии с уравнениями движения рассматриваемой системы площадь этого участка остается

неизменной, хотя внешняя форма этого участка меняется:

$$\int dQ\, dP = const\ . \tag{1.9}$$

Медленное (адиабатическое) изменение периодического движения за счет медленного изменения некоторого параметра λ, характеризующего свойства самой системы или внешнего поля, в котором она находится, приводит к тому, что фазовые траектории становятся немного незамкнутыми (квазизамкнутыми). Под медленным изменением подразумевается такое, при котором λ мало меняется за время периода движения системы T:

$$T\,\frac{d\lambda}{dt} << \lambda\ . \tag{1.10}$$

Величину, остающуюся постоянной при движении системы с медленно меняющимися параметрами, называют *адиабатическим инвариантом*

$$I = \frac{1}{2\pi}\int P\, dQ = inv\ , \tag{1.11}$$

где интеграл берется по замкнутой траектории движения при заданных (постоянных) H и λ.

Можно показать, что переменные γ' и φ являются канонически сопряженными, если в качестве времени использовать переменную ξ. То есть

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{\partial H}{\partial \gamma'}, \\ \frac{d\gamma'}{d\xi} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

где гамильтониан равен

$$\begin{aligned} H(\gamma',\varphi,\xi) &= -G\cdot(\sin\varphi - \varphi\cdot\cos\varphi_s) + 2\pi\int\left(\frac{1}{\beta_\phi} - \frac{1}{\beta_e}\right)d\gamma' = \\ &= -G\cdot(\sin\varphi - \varphi\cdot\cos\varphi_s) + \frac{2\pi}{\beta_\phi}\cdot(\gamma' - \beta_\phi p' c) \end{aligned}, \tag{1.13}$$

где приведенный импульс p' отсчитывается также от равновесного значения $p_s = \gamma_s\beta_\phi$:

$$p' = \gamma\beta - p_s\ . \tag{1.14}$$

Основные свойства неравновесного движения можно рассмотреть на примере движения частицы в постоянном ускоряющем поле с постоянной фазовой скоростью. Так как при этом гамильтониан явно не зависит от ξ, то при движении частицы он сохраняется, а кривые $H = const$

представляют собой фазовые траектории (см. рис. 1.1). Стрелками на рисунке указано направление движения частицы по фазовой траектории при увеличении относительной координаты ξ. Видно, что фазовая плоскость разделена на две области – с разомкнутыми фазовыми траекториями и с замкнутыми, окружающими точку равновесной фазы

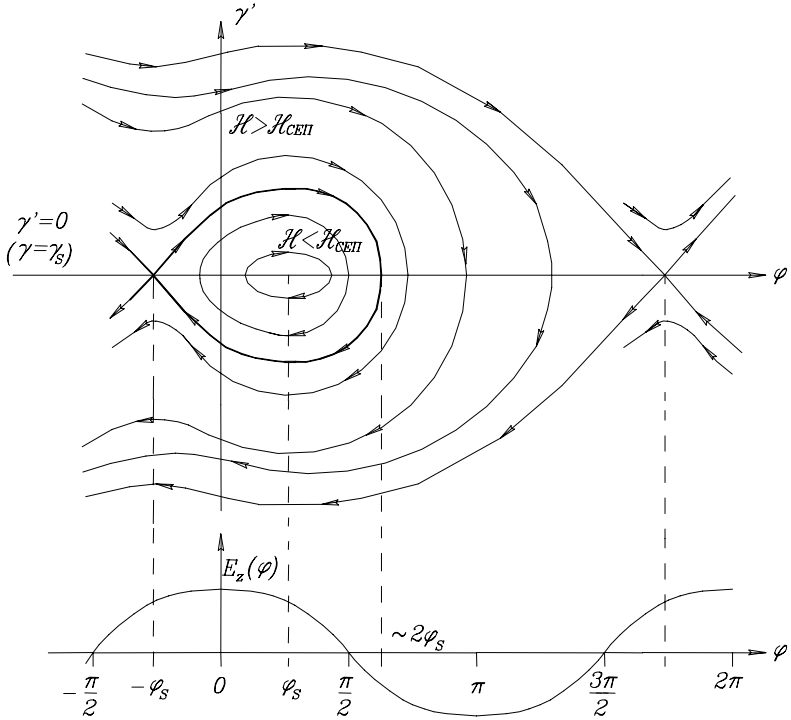


Рис. 1.1. Фазовые траектории движения частиц

$\varphi = \varphi_s$, $\gamma' = 0$. Для ускоряемых частиц, попавших при некоторых начальных условиях в замкнутую область, движение оказывается устойчивым, т. е. они оказываются захваченными в режим ускорения и двигаются вблизи равновесной частицы. Эту область и называют *областью устойчивости.* Фазовая траектория, разделяющая области устойчивости и неустойчивости, называется *сепаратрисой*. Площадь, охватываемая сепаратрисой, называется *продольным аксептансом*. Видно, что сепаратриса проходит через точку $\varphi = -\varphi_s$ и $\gamma' = 0$, что соответствует гамильтониану

$$H_{\text{сеп}} = G \cdot (\sin\varphi_s - \varphi_s \cdot \cos\varphi_s). \qquad (1.15)$$

Максимальное и минимальное значение отклонения энергии захваченных частиц от равновесной γ' достигается на сепаратрисе при $\varphi = \varphi_s$. Его можно найти при подстановке $H = H_{\text{сеп}}$ и $\varphi = \varphi_s$ в общее выражение для гамильтониана. В случае тяжелых частиц при $G << 1$ выражения для $\gamma'_{\substack{max \\ min}}$ можно записать в не очень громоздком виде:

$$\gamma'_{\substack{max \\ min}} = \pm\left[2G\beta_\phi^3\gamma_s \cdot (\sin\varphi_s - \varphi_s \cdot \cos\varphi_s) \cdot \pi^{-1}\right]^{1/2}. \qquad (1.16)$$

Координата второй точки пересечения сепаратрисы с осью $\gamma' = 0$ приблизительно равна $2\varphi_s$. То есть размер области захвата в режим ускорения $\Delta\varphi \approx 3\varphi_s$.

Малые фазовые колебания

Рассмотрим малые фазовые колебания частиц, совершаемые около равновесного значения $\varphi = \varphi_s$ и $\gamma' = 0$. Разлагая гамильтониан вблизи положения равновесия и полагая $\phi = \varphi - \varphi_s$, получим

$$H \approx \frac{2\pi}{\beta_\phi^3\gamma_s^3} \cdot \frac{\gamma'^2}{2} + G \cdot \sin\varphi_s \cdot \frac{\phi^2}{2}. \qquad (1.17)$$

Можно сравнить полученный гамильтониан с классическим гамильтонианом, описывающим колебания шарика массой m на пружинке с коэффициентом упругости k: координата шарика x, импульс $p = m\dot{x}$. Уравнение движения для него $m\ddot{x} + kx = 0$, гамильтониан

$$H = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, \qquad (1.18)$$

а частота колебаний $\Omega^2 = \dfrac{k}{m}$. Сравнивая гамильтонианы, находим, что роль эффективной массы при рассмотрении фазовых колебаний частиц в ускорителе играет величина $M = \beta_\phi^3\gamma_s^3 / 2\pi$, а коэффициента упругости $K = G \cdot \sin\varphi_s$. Следовательно, частота фазовых колебаний по отношению к переменной ξ есть

$$\Omega_\xi \equiv \frac{d\phi}{d\xi} = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi G \cdot \sin\varphi_s}{\beta_\phi^3\gamma_s^3}}. \qquad (1.19)$$

Само уравнение для малых фазовых колебаний будет иметь вид

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \Omega_\xi^2\,\phi = 0\,. \qquad (1.20)$$

Поскольку для равновесной частицы $\frac{d\xi}{dt} = \frac{c}{\lambda}\cdot\beta_\phi = \frac{\omega\beta_\phi}{2\pi}$, то временная частота фазовых колебаний равна

$$\frac{\Omega_t}{\omega} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\phi}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = \Omega_\xi\cdot\frac{\beta_\phi}{2\pi} = \sqrt{\frac{G\cdot\sin\varphi_s}{2\pi\beta_\phi\gamma_s^3}}\,. \qquad (1.21)$$

Для устойчивости продольного движения должно выполняться условие $\Omega_\xi^2 > 0$. Вместе с условием ускорения это дает область синхронных фаз, обеспечивающих продольную устойчивость:

$$0 < \varphi_s < \frac{\pi}{2}\,. \qquad (1.22)$$

Отметим, что с ростом синхронной фазы увеличивается частота продольных колебаний и, следовательно, улучшается их устойчивость.

При адиабатическом изменении параметров системы можно получить изменения амплитуды фазовых колебаний. Для классического примера с шариком на пружинке имеем

$$x = x_{max}\cdot\sin\Omega\,t\,,$$
$$p = m\dot{x} = m\Omega\cdot x_{max}\cdot\cos\Omega\,t\,. \qquad (1.23)$$

Адиабатический инвариант $I = \frac{1}{2\pi}\int pdx \sim x_{max}^2\cdot\Omega\,m = const$. Откуда следует, что при адиабатическом изменении параметров

$$x_{max}^2 \sim \frac{1}{\Omega\,m} = \frac{1}{\sqrt{km}}\,,$$
$$p_{max}^2 = (m\,\Omega)^2\cdot x_{max}^2 \sim m\,\Omega = \sqrt{km}\,. \qquad (1.24)$$

По аналогии имеем закон изменения амплитуды фазовых колебаний при адиабатическом изменении параметров G, φ_s или β_ϕ

$$\phi_{max} \sim (KM)^{-1/4} = \left(G\cdot\sin\varphi_s\cdot\beta_\phi^3\gamma_s^3\right)^{-1/4} \sim p_s^{-3/4}\,,$$
$$\gamma'_{max} \sim (KM)^{1/4} = \left(G\cdot\sin\varphi_s\cdot\beta_\phi^3\gamma_s^3\right)^{1/4}\,. \qquad (1.25)$$

Максимальный размер сгустка $\Delta z = \frac{v_\phi}{\omega}\cdot\phi_{max} \sim \phi_{max}\cdot\frac{p_s}{\gamma_s} \sim \gamma_s^{-1}p_s^{1/4}$.

Зная γ'_{max}, можно получить выражение для максимального разброса по

импульсам

$$\Delta p_{max} \sim \gamma_s p_s^{-1/4} \sim \gamma_s^{3/4} \beta^{1/4}$$

или

$$\frac{\Delta p_{max}}{p_s} \sim \gamma_s p_s^{-5/4} \sim \gamma_s^{-1/4} \beta^{-5/4}. \qquad (1.26)$$

Продольное движение в поле волны с $\beta_ф$ =1

При рассмотрении движения частицы в поле волны с β_ϕ =1 теряет смысл понятие равновесной частицы, так как ее энергия равна бесконечности. Однако переменные γ и φ сохраняют смысл канонически сопряженной пары. Уравнения движения в поле волны с β_ϕ =1

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = G \cdot \cos\varphi ,$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = 2\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\beta}\right). \qquad (1.27)$$

Гамильтониан движения есть

$$H = -G \cdot \sin\varphi + 2\pi \int \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) d\gamma = = -G \cdot \sin\varphi + 2\pi\gamma(1 - \beta). \qquad (1.28)$$

На рисунке 1.2 изображены фазовые траектории при $\beta_\phi = 1$, которые описываются выражением $H = const$. Стрелками показано направление движения по фазовым траекториям, соответствующее увеличению продольной координаты ξ.

Ранее сепаратрисой называли фазовую траекторию, разделяющую области устойчивости и неустойчивости. Находясь в области устойчивости, частицы оказываются захваченными в режим ускорения и непрерывно, в среднем увеличивают свою энергию. При движении в поле волны с $\beta_\phi = 1$ можно также задаться вопросом, находясь на каких фазовых траекториях частица может достигнуть сколь угодно большой энергии. При $\gamma \to \infty$ $\beta \approx 1 - \left(2\gamma^2\right)^{-1} \Rightarrow \gamma \cdot (1 - \beta) \to 0$. Из выражения для гамильтониана имеем

$$\sin\varphi_{\gamma\to\infty} \to \sin\varphi_\infty = -H / G. \qquad (1.29)$$

Так как $\left|\sin\varphi_\infty\right| \le 1$, то сколь угодно большой энергии могут достигнуть только те частицы, у которых $H < G$. Соответствующие фазовые траектории поднимаются или опускаются почти вертикально при значени-

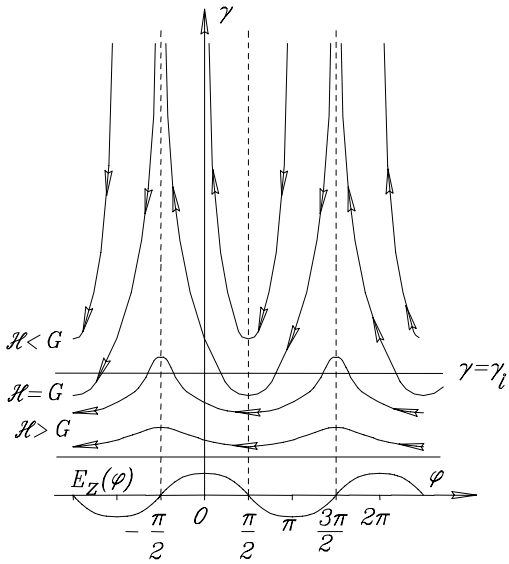


Рис. 1.2. Фазовые траектории при $\beta_\phi = 1$

ях $\varphi = \varphi_\infty$. Фазовые траектории с $H > G$ всегда остаются при конечной энергии, хотя она может быть большой при $H \to G$. По этим причинам область фазовой плоскости, где $H < G$, называют областью захвата частиц волной, а фазовую траекторию $H = G$ - сепаратрисой, хотя она и является замкнутой.

При известных начальных значениях инжекции $\varphi_{\text{инж}}$ и $\gamma_{\text{инж}}$ гамильтониан равен

$$H = -G \cdot \sin\varphi_{\text{инж}} + 2\pi \cdot \gamma_{\text{инж}} \cdot \left(1 - \beta_{\text{инж}}\right) \qquad (1.30)$$

и сохраняет постоянное значение вдоль фазовой траектории. Откуда можно определить условие захвата частиц волной:

$$\gamma_{\text{инж}} > \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{2\pi}{G \cdot \left(1 + \sin\varphi_{\text{инж}}\right)} + \frac{G \cdot \left(1 + \sin\varphi_{\text{инж}}\right)}{2\pi} \right\}. \qquad (1.31)$$

Обогнать волну, двигающуюся со скоростью света, частицы не могут ни при каких условиях, поэтому фазовых колебаний при $\beta_\phi = 1$ быть не может. Движение ускоряемых частиц по фазовым траекториям в области захвата вырождаются в апериодическое стремление к $\varphi = \varphi_\infty$, а фазовые

траектории всегда незамкнуты. Если энергия инжекции настолько мала, что на фазовой плоскости она расположена ниже сепаратрисы в точке при $\varphi = \pi / 2$, то ни одна частица не будет захвачена в режим ускорения. Хотя частицы, двигающиеся вблизи сепаратрисы, при некоторой длине ускорителя могут набрать достаточно большую энергию, дойдя до точки с $\varphi = -\pi / 2$. Из полученного выше условия захвата частиц волной при $\varphi = \pi / 2$ можно определить минимальную энергию инжекции $\gamma_{\substack{\text{инж}\\ \text{мин}}}$, необходимую для захвата в режим ускорения:

$$\gamma_{\substack{\text{инж}\\ \text{мин}}} = \frac{1 + (G/\pi)^2}{2(G/\pi)}, \quad \text{или} \quad \beta_{\substack{\text{инж}\\ \text{мин}}} = \frac{1 - (G/\pi)^2}{1 + (G/\pi)^2}. \qquad (1.32)$$

<u>Пример</u>: Электронный ускоритель с параметрами:

$$\lambda_0 = 0{,}1 \text{ м}, \quad E_0 = 5 \text{ МВ/м} \;\Rightarrow\; G \approx 1 \;\Rightarrow \gamma_{\substack{\text{инж}\\ \text{мин}}} = 1{,}7 \;\; (\; W_{\text{инж}} = \; 350 \text{ кэВ}).$$

Из уравнений движения видно, что максимальный прирост энергии происходит при $\varphi = 0$, т. е. при движении в максимуме электрического поля. Для того чтобы частица находилась при $\varphi = \varphi_\infty = 0$ (где она проводит почти все время), необходимо, чтобы при инжекции она находилась на фазовой траектории $H = 0$, так как $sin\,\varphi_\infty = -H / G$. При этом минимально необходимая для захвата энергия будет несколько выше ранее полученной:

$$\gamma_{\substack{\text{инж}\\ \text{мин}}} = \frac{1 + (G/2\pi)^2}{(G/2\pi)}, \quad \text{или} \quad \beta_{\substack{\text{инж}\\ \text{мин}}} = \frac{1 - (G/2\pi)^2}{1 + (G/2\pi)^2}. \qquad (1.33)$$

Для приведенного выше примера электронного ускорителя она соответствует приблизительно 1,2 МэВ.

При инжекции в ускоритель непрерывного пучка в режим ускорения захватятся только те частицы, которые занимают при инжекции пространство между двумя ветвями сепаратрисы. Частицы, находящиеся на фазовых траекториях, близких к сепаратрисе, увеличивают свою энергию медленнее, чем на фазовых траекториях с $H \approx 0$, так как те ускоряются при $\varphi_\infty \approx 0$. Тогда через некоторое время распределение частиц на фазовой плоскости изменится. Более быстрые частицы обгонят более медленные, и сгусток “согнется в дугу”, сгруппировавшись примерно вдвое по фазе, но сильно увеличив свой энергетический разброс.

Для больших значений ускоряющих полей

$$G >> 2\pi\gamma_{\text{инж}} \cdot (1 - \beta_{\text{инж}}) \;\Rightarrow\; \sin\varphi_\infty = -H / G \approx \sin\varphi_{\text{инж}}. \qquad (1.34)$$

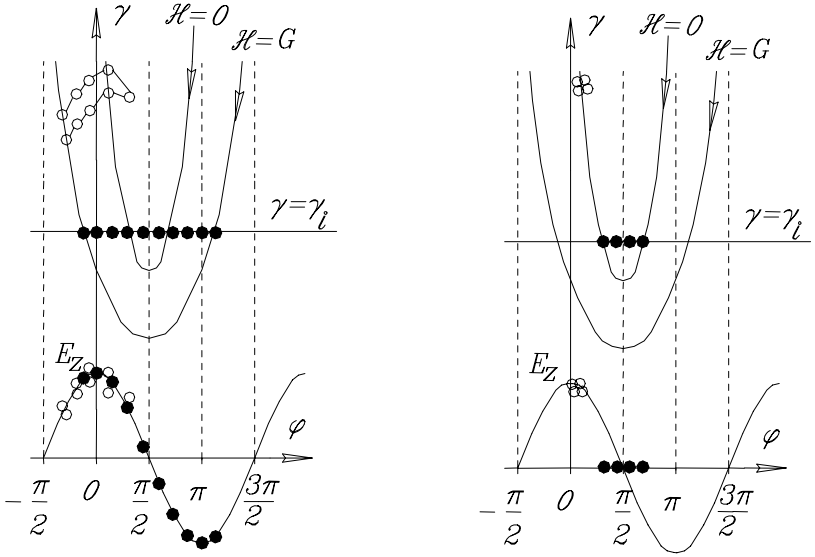


Рис. 1.3. Группировка частиц при движении в УС с $\beta_ф = 1$

То есть асимптотическая фаза в поле с большой напряженностью определяется только фазой инжекции:

$$\varphi_\infty \approx \varphi_{инж} \quad \text{при} \quad -\pi/2 < \varphi_{инж} < \pi/2,$$

$$\varphi_\infty \approx \pi - \varphi_{инж} \quad \text{при} \quad \pi/2 < \varphi_{инж} < 3\pi/2. \qquad (1.35)$$

Тогда и величина $cos\,\varphi$ во время ускорения существенно не меняется. В приросте энергии на единицу длины можно заменить $\cos\varphi \approx \cos\varphi_{инж}$. Если пренебречь энергией инжекции, энергия пучка на выходе ускорителя длиной L будет равна $\varepsilon \approx eE_0 L\cos\varphi_{инж}$. Таким образом частицы, первоначально равномерно распределенные по фазам, на выходе ускорителя будут иметь *любую* энергию - от начальной до максимальной.

Для получения на выходе ускорителя пучка с малым энергетическим разбросом необходимо инжектировать частицы, уже сгруппированные по фазе в области с $\varphi_{инж} \approx \pi/2$. Тогда они быстро переместятся в область вблизи $\varphi_\infty \approx 0$ и будут ускорены на гребне волны до максимальной энергии с малым энергетическим разбросом. При асимптотических фазах шириной $\Delta\varphi_\infty$ около значения $\varphi_\infty = 0$ энергетический разброс будет

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \Delta(\cos\varphi_\infty) \approx \frac{(\Delta\varphi_\infty)^2}{2}. \qquad (1.36)$$

Из рисунка видно, что если инжекцию производят в фазе $\varphi_{\text{инж}} = \pi/2$ с фазовой протяженностью сгустка $\Delta\varphi_{\text{инж}}$, то $\Delta\varphi_\infty = \frac{\Delta\varphi_{\text{инж}}}{2}$ и, следовательно,

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} \approx \frac{(\Delta\varphi_{\text{инж}})^2}{8}. \qquad (1.37)$$

Глава 2

ГРУППИРОВАТЕЛИ

Для уменьшения потерь пучка в основном ускорителе, а также для улучшения энергетических характеристик пучка частицы предварительно группируются по фазе в так называемых группирователях. Группирователь должен сформировать сгустки, отстоящие друг от друга на расстояние, равное длине ускоряющей гармоники в основном ускорителе. Рассмотрим несколько схем предварительного формирования сгустка.

Чопперы

Наиболее простым прибором для формирования коротких по фазе сгустков являются так называемые чопперы (от английского chop – рубить). На рисунке 2.1 изображены наиболее распространенные схемы

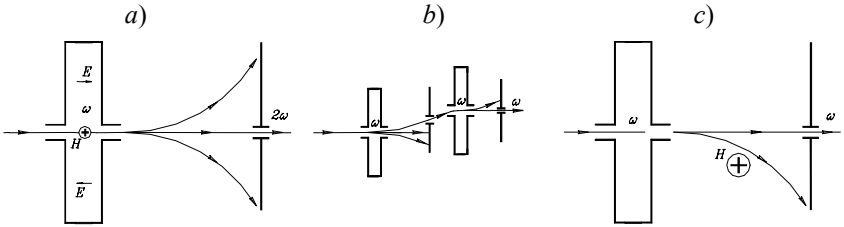
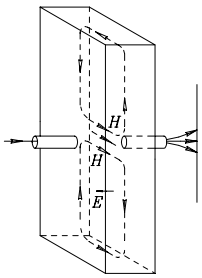


Рис. 2.1. Различные варианты чопперов:
a) с использованием одного резонатора,
b) с двумя резонаторами,
c) с дополнительным постоянным магнитным полем.



чопперов. Во всех схемах непрерывный пучок пролетает резонатор, возбуждаемый на частоте ω. Обычно это резонатор с поперечным магнитным полем в области пролета пучка. Например, прямоугольный резонатор с H_{102} типом колебания, у которого в месте пролета пучка магнитное поле максимально, а электрическое равно нулю (см. рисунок). На выходе из резонатора пучок с частотой ω будет отклоняться в вертикальном направлении. На некотором расстоянии от резонатора ставят коллиматор – диафрагму с узкой щелью по оси пучка. Проходящие импульсы могут иметь очень малую

длительность, а остальные частицы срезаются коллиматором и не загружают волновод. В первой схеме (рис.2.1, *a*) на выходе мы будем иметь короткие сгустки, следующие с частотой 2ω. То есть рабочая частота основного ускорителя тоже должна быть 2ω. Для того чтобы пучок на выходе имел частоту ω, добавляют еще один резонатор, а коллиматор после первого резонатора вырезает верхнюю часть пучка (рис.2.1, *b*). Можно обойтись и одним резонатором, как показано на рис.2.1, *c*. В этой схеме пучок после выхода из резонатора попадает в постоянное внешнее магнитное поле. Его величину выбирают таким образом, чтобы в отверстие коллиматора попадал самый край пучка. Преимущество такой схемы в том, что на выходе мы сразу имеем сгустки, следующие с частотой ω. Тем самым отпадает необходимость в двух генераторах или в двух резонаторах. Кроме того, выходящие из коллиматора сгустки имеют нулевую поперечную скорость, в то время как в первой схеме (рис.2.1, *a*) она при пролете коллиматора максимальна. Основное преимущество чопперов в том, что они не меняют энергетического разброса начального пучка, так как все отклонения происходят в магнитных полях. Главный недостаток очевиден – очень большие потери основного пучка.

ВЧ-пушки

Существует несколько схем ВЧ-пушек.

Пушка с СВЧ-отсечкой тока

Принцип работы пушки с СВЧ-отсечкой заключается в следующем: на зазор сетка-катод трехэлектродной пушки подается высокочастотное напряжение от СВЧ-генератора, питающего ускоритель. В положительные полупериоды СВЧ-колебаний, когда сетка имеет положительный потенциал по отношению к катоду, электронные сгустки фазовой протяженностью $\Delta\varphi = 180^{\circ}$ инжектируются из зазора сетка-катод в ускоряющий промежуток сетка-анод, к которому приложено напряжение инжекции. В отрицательные полупериоды колебаний инжекции в ускоряющий промежуток не происходит. Таким образом, формирование электронных сгустков осуществляется в самой пушке. Непосредственно за электронной пушкой устанавливают однорезонаторный группирователь, уменьшающий фазовую протяженность сформированных сгустков и обеспечивающий оптимальное фазо-энергетическое распределение на входе ускорителя. Для уменьшения начальной протяженности сгустков на сетку можно дополнительно подать постоянное отрицательное смещение. В ускоряющий промежуток электро-

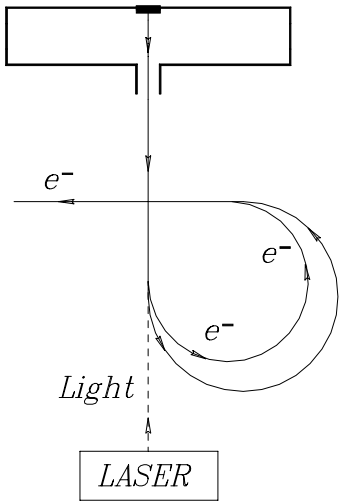
ны будут инжектироваться только тогда, когда СВЧ-напряжение на сетке будет больше напряжения смещения. Таким образом можно сразу формировать короткие сгустки.

СВЧ-пушка

Наличие сетки не позволяет работать с большими токами. В СВЧ-пушке катод размещается непосредственно в резонаторе. В СВЧ-резонаторе можно получить электрические поля высокой напряженности, необходимые для формирования и ускорения до требуемой энергии. Кроме того, это дает возможность получения больших токов. Недостатки такой системы – обратная бомбардировка катода электронами, вышедшими за пределы оптимальной фазы захвата (>100°) и как следствие – нестабильность тока из-за дополнительного разогрева катода, а также большой энергетический разброс в сгустке.

СВЧ-фотопушка

Электронный сгусток малой длительности может быть сформирован СВЧ-пушкой с *фотокатодом*, облучаемым коротким лазерным импульсом ($\tau \sim 10 \div 20$ наносекунд). Это дает возможность получать электронные сгустки с энергией 2÷3 МэВ и длительностью ~ 20 нсек. В настоящее время в качестве фотокатода применяют арсенид-галлиевый катод. Его наиболее существенными достоинствами являются высокая квантовая эффективность (более 1 %) и достаточная эмиссионная способность (более 200 А/см ^{2}). Кроме того, освещение арсенид-галлиевого фотокатода светом с круговой поляризацией и соответствующей длиной волны приводит к ориентации спина фотоэлектронов в направлении падения излучения. Причем выходной пучок оказывается практически полностью поляризованным (более 80 %). На сегодняшний день такой катод является одним из наиболее эффективных источников поляризованных электронов.



Обычно сразу после СВЧ-пушки помещают α-магнит (см. рисунок), который уменьшает размер сгустка за счет разности энергий электронов, вылетевших в разные

фазы СВЧ-поля в резонаторе. Кроме того, α-магнит дает возможность чисто технической развязки направлений движения света от лазера и выходного пучка.

Клистронные группирователи

В клистронном группирователе поток частиц с равномерным распределением по фазе проходит систему, состоящую из резонатора и пространства дрейфа. В резонаторе происходит модуляция частиц по скорости, переходящая в трубках дрейфа в модуляцию в пространстве. После пролета зазора резонатора и пространства дрейфа непрерывный пучок превращается в сгустки, отстоящие друг от друга на расстояние, равное ускоряющей длине волны. Отсюда сразу следует, что невозможно таким образом группировать релятивистский пучок с $\beta_e = 1$.

Оценим параметры однозазорного резонатора. Считаем, что распределение поля в резонаторе не зависит от координаты. Изменение импульса частицы в резонаторе с рабочей частотой ω есть

$$\frac{dp}{dt} = eE \sin\left[\omega\left(t - t_0\right)\right], \tag{2.1}$$

где t_0 - для удобства время пролета частицы середины резонатора. Интегрируя уравнение, получим, что, пролетев резонатор, частица изменит свой импульс на

$$\delta\ p = eET \cdot \frac{\sin\left(\omega T/2\right)}{\omega T/2} \cdot \sin\omega\, t_0 . \tag{2.2}$$

Будем считать, что скорость при пролете резонатора меняется незначительно. Тогда, двигаясь со скоростью v_0, частица пролетит зазор резонатора d за время $T \approx d\ /\ v_0$, откуда $\omega T = \dfrac{\omega\, d}{v_0} = \dfrac{2\pi\ cd}{\lambda v_0} = \dfrac{2\pi\ d}{\lambda\beta_{e0}} = \theta$. Величина θ называется углом пролета резонатора. Считая частицу нерелятивистской, получим приращение ее скорости после пролета резонатора

$$\delta\ v = \frac{\delta\ p}{m} = v_0 \cdot \frac{eEd}{mv_0^2} \cdot \frac{\sin\left(\theta/2\right)}{\left(\theta/2\right)} \cdot \sin\omega\, t_0 . \tag{2.3}$$

Коэффициент $M = \dfrac{\sin\left(\theta/2\right)}{\left(\theta/2\right)}$ в теории клистронов называется коэффициентом связи электронного потока с резонатором. Обозначая амплитуду переменного напряжения на резонаторе $U_m = eEd$, а энергию частицы

$U_0 = \dfrac{mv_0^2}{2}$, перепишем выражение для приращения скорости в виде

$$\delta v = v_0 \cdot \nu \cdot \sin \omega t_0, \tag{2.4}$$

где $\nu = \dfrac{M}{2} \cdot \dfrac{U_m}{U_0}$ называется коэффициентом скоростной модуляции. Видно, что частицы, влетевшие в резонатор в разные моменты времени, будут иметь различные приращения скорости. В частности, в пучке будут частицы, которые не изменят своей скорости (при $\omega t_0 = 0$). Частицы вокруг них, имея разные по знаку приращения скорости, пролетев некоторое расстояние, будут группироваться вокруг одной точки. Частица, которая не изменит своей скорости за время t, проведенное в пространстве дрейфа, пройдет расстояние $L = v_0 t$ и будет находиться в точке с координатой $z_0 = L$. Когда частицы, имеющие максимальное и минимальное приращение скорости (т. е. вылетевшие в моменты времени $\omega t_0 = \pm \pi / 2$), соберутся в точку, группировку сгустка можно считать максимальной. Остальные частицы образуют т. н. “хвосты”. Через время t частицы, имеющие приращение скорости δv, будут находиться в точке

$$z = (v_0 + \delta v) \cdot (t - t_0) = L + \frac{\delta v}{v_0} \cdot L - (v_0 + \delta v) \cdot t_0. \tag{2.5}$$

Для максимальной группировки $z = z_0 = L$, откуда можно получить необходимую для максимальной группировки длину пространства группировки

$$L = \frac{(v_0 + \delta v) \cdot t_0}{\delta v / v_0} \approx \frac{v_0^2 t_0}{\delta v} = \frac{\pi v_0}{\omega} \cdot \frac{U_0}{MU_m} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\beta_e}{M} \cdot \frac{U_0}{U_m}. \tag{2.6}$$

Здесь учтено, что $\omega t_0 = \pi / 2$.

Пучок, полученный после пространства взаимодействия, будет иметь неравномерную плотность распределения частиц по фазам. Фаза, которую будет иметь частица через время t после пространства дрейфа длиной L, –

$$\varphi = \omega t = \frac{\omega L}{v} = \frac{\omega L}{c} \cdot \frac{1}{\beta}. \tag{2.7}$$

Импульс частицы $p = mv\gamma = mc \cdot \dfrac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \dfrac{mc}{\sqrt{(1/\beta)^2 - 1}}$.

Разложим в ряд $\dfrac{1}{\beta} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{mc}{p}\right)^2}$:

$$\frac{1}{\beta} \approx \frac{1}{\beta_0} - \frac{1}{\sqrt{1+(mc\ /\ p_0)^2}} \cdot \frac{(mc)^2}{p_0^3} \cdot \delta\ p\ . \qquad (2.8)$$

Приращение импульса после пролета резонатора

$$\delta\ p = \frac{U_m}{c\beta_0} \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \cdot \sin\ \omega\, t_0 = \frac{U_m}{c\beta_0} \cdot M \cdot \sin\ \omega\, t_0\ . \qquad (2.9)$$

Тогда получим

$$\frac{1}{\beta} \approx \frac{1}{\beta_0} - \frac{U_m}{mc^2} \cdot \frac{2\pi L}{\lambda} \cdot \frac{M}{\beta_0^3 \gamma_0^3} \cdot \sin \omega\, t_0\ . \qquad (2.10)$$

Выражение для φ запишем в виде

$$\varphi = \varphi_0 - r \cdot \sin \varphi_0\ , \qquad (2.11)$$

где $\varphi_0 = \omega\, t_0 = \dfrac{\omega\, L}{c\beta_0}$, $r = \dfrac{eEd}{mc^2} \cdot \dfrac{2\pi L}{\lambda} \cdot \dfrac{1}{\beta_0^3 \gamma_0^3} \cdot \dfrac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}$ – коэффициент, характеризующий параметры группирователя.

Пучок, полученный после пролетного пространства, будет иметь неравномерную плотность распределения частиц по фазам. Для характеристики качества группировки вводят понятие коэффициента группировки $k_{\text{гр}}$ – отношение фазовой плотности $n_{\text{вых}}$ частиц на выходе группирователя к фазовой плотности $n_{\text{вх}}$ на его входе. Поскольку в результате группировки все частицы, находившиеся в интервале входных фаз $d\varphi_{\text{вх}}$, переходят в интервал выходных фаз $d\varphi_{\text{вых}}$, то

$$n_{\text{вх}} \left| d\varphi_{\text{вх}} \right| = n_{\text{вых}} \left| d\varphi_{\text{вых}} \right| \qquad (2.12)$$

и

$$k_{\text{гр}}(\varphi_{\text{вых}}) = n_{\text{вых}}\ /\ n_{\text{вх}} = \left| d\varphi_{\text{вх}}\ /\ d\varphi_{\text{вых}} \right|\ . \qquad (2.13)$$

Коэффициент группировки будет разным для разных фазовых интервалов, и на практике основной интерес представляет его максимальное значение и интеграл по некоторому интервалу $\Delta\varphi_{\text{вых}}$:

$$K_{\text{гр}}(\Delta\varphi_{\text{вых}}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Delta\varphi_{\text{вых}}} k_{\text{гр}}(\varphi_{\text{вых}})\, d\varphi_{\text{вых}}\ . \qquad (2.14)$$

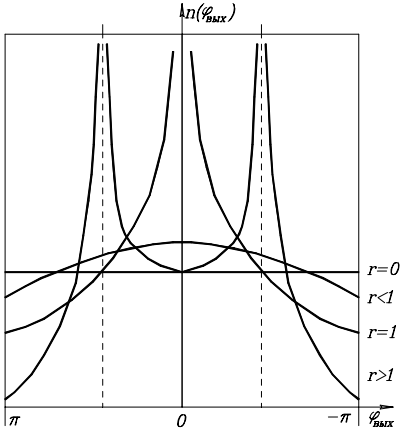
Эта величина показывает, какая доля частиц, первоначально равномерно распределенных по фазам, окажется в результате группировки в интервале $\Delta\varphi_{\text{вых}}$. Введение этих двух характеристик обусловлено возможностью разных требований к параметрам выходного пучка. Если нужно получить как можно большую интенсивность при умеренно малом энергетическом

разбросе, то надо оптимизировать в первую очередь $K_{\text{гр}}$, если же необходимо получить как можно более узкий энергетический спектр, пусть даже за счет полной интенсивности, то нужно стремиться к большему $k_{\text{гр}}$.

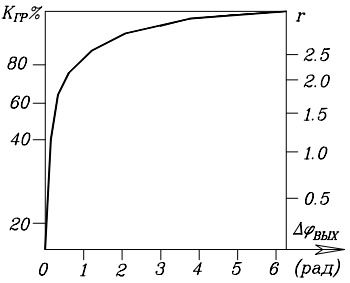
Дифференцируя выражение для выходных фаз клистронного группирователя, найдем его коэффициент группировки

$$k_{\text{гр}}(\varphi_{\text{вых}}) = \left|\frac{d\varphi_{\text{вх}}}{d\varphi_{\text{вых}}}\right| = \frac{1}{2\pi \cdot \left|1 - r\cos\varphi_{\text{вх}}\right|}. \qquad (2.15)$$

На рисунке показана зависимость плотности тока на выходе клистронного группирователя от выходной фазы $\varphi_{\text{вых}}$ для различных коэффициентов r. При $r = 0$ группировка отсутствует и плотность тока на выходе остается постоянной. При $r = 1$ фазовая плотность максимальна. При дальнейшем увеличении коэффициента r происходит эффект перегруппировки: сзади идущие частицы перегоняют впереди идущие и вместо одного сгустка начинают формироваться два. Иногда этот эффект используют для удвоения частоты в генераторах СВЧ.



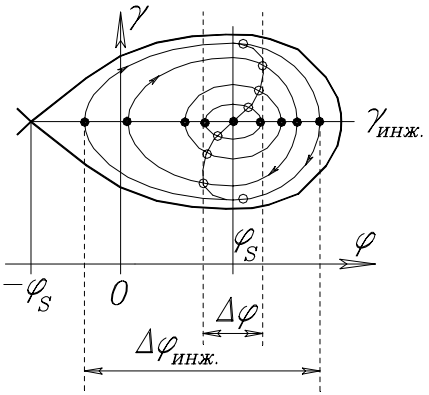
Задавая интервал выходных фаз $\Delta\varphi_{\text{вых}}$ и проинтегрировав по нему выражение для $k_{\text{гр}}(\varphi_{\text{вых}})$, можно узнать, какой процент инжектированных частиц можно сгруппировать в этом интервале, т. е. найти коэффициент $K_{\text{гр}}$. На рисунке приведен график, где по оси абсцисс отложен интервал фаз, в котором сосредоточены сгруппированные частицы после пространства дрейфа, по оси ординат слева – проценты, определяющие долю сгруппированных частиц, а по оси ординат справа – коэффициент r. Задавая интервал выходных фаз, например, $\Delta\varphi_{\text{вых}}$ =1 рад, по кривой определяем, что частицы, попавшие после группировки в этот интервал, составляют



около 70 % общего числа. По правой оси ординат находим, что для этого надо иметь группирователь с коэффициентом $r = 1{,}8$. Зная r, можно определить все параметры такого клистронного группирователя.

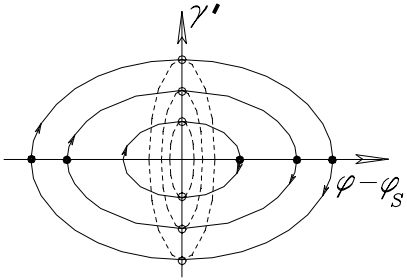
Волноводные группирователи

В ускоряющей секции с бегущей волной частицы, двигаясь по фазовым траекториям, также группируются. Движение электронов на фазовой плоскости в ускоряющей секции с постоянной фазовой скоростью волны $\beta_ф$ показано на рисунке. Частицы инжектируются со скоростью, равной фазовой скорости волны. Ускорения пучка как целого в таком случае не будет, но все частицы будут совершать фазовые колебания относительно синхронной частицы, находящейся в фазе $\varphi_s = \pi/2$. Точками на рисунке показано начальное распределение частиц по фазам. Скорость движения изображающих точек по фазовым траекториям определяется частотой фазовых колебаний. При малых фазовых колебаниях их частота постоянна и не зависит от траектории, по которой движется частица. То есть частицы, располагающиеся вблизи синхронной, будут вращаться на фазовой плоскости вокруг точки $\varphi_s = \pi/2$ с одинаковой скоростью. Тогда через четверть периода фазовых колебаний фазовый размер сгустка стал бы нулевым и мы бы имели на выходе абсолютно сгруппированный сгусток. В силу же нелинейности фазовых колебаний с увеличением амплитуды частота колебаний уменьшается, стремясь к нулю при приближении к сепаратрисе. Это приводит к тому, что крайние частицы будут вращаться с меньшей скоростью. Поэтому через время немного больше четверти периода фазовых колебаний изображающие точки расположатся на *г*-образной кривой. При этом по сравнению с начальным распределением фазовый интервал все же уменьшится с $\Delta\varphi_{инж}$ до $\Delta\varphi$. На этой длине заканчивается фазовая группировка, так как при дальнейшем движении фазовая ширина сгустка вновь начнет увеличиваться.



Существуют различные способы улучшения группировки в волноводных группирователях. Например, в группирователе с $\beta_ф = \beta_{e\,инж} = const$ мож-

но использовать дополнительную секцию волновода, где напряженность ускоряющего поля скачком увеличивается в 5–6 раз по сравнению с напряженностью в первой секции. При увеличении напряженности ускоряющего поля вертикальные размеры фазовых траекторий не меняются, т. к. они пропорциональны корню квадратному из эффективной массы $M = \beta_{\phi}^{3}\gamma_{s}^{3} / 2\pi$. Горизонтальные же размеры траекторий уменьшаются пропорционально корню квадратному из коэффициента упругости $K = G \cdot \sin\varphi_s \sim E$. Поэтому, пройдя четверть периода фазовых колебаний в первой секции, частицы, попадая во вторую секцию, продолжат движение по траекториям с более узкими горизонтальными размерами. Следуя по новым траекториям, через четверть периода фазовых колебаний во второй секции частицы оказываются сильно сгруппированными при сохранении малого (начального) энергетического разброса.



Наилучшие результаты по группировке можно получить с помощью волноводного группирователя, в котором амплитуда ускоряющего поля плавно увеличивается по длине группирователя. При этом фазовая скорость волны в группирователе либо остается постоянной, либо подстраивается под увеличивающуюся скорость частиц. Такие группирователи могут обеспечить почти полный захват частиц в режим ускорения при достаточно хорошем фазовом (10-30^0) и энергетическом (3-7%) спектрах частиц на выходе. Нарастающую естественным образом амплитуду ускоряющего поля в секции можно получить, работая на обратной гармонике, т. е. когда пучок летит навстречу распространяющейся в секции мощности. В круглом диафрагмированном волноводе амплитуда первой обратной гармоники (минус первой гармоники) мала. Однако существует целый класс ускоряющих структур, у которых обратная гармоника является основной и имеет большую амплитуду.

Рассмотрим случай группировки в экспоненциально нарастающем поле. Уравнения движения для него запишутся

$$\frac{dp}{dt} = eE_0 \cdot e^{az}\cos\varphi ,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot \left(\frac{\beta_e}{\beta_{\phi}} - 1 \right). \qquad (2.16)$$

Так как в группирователе обычно $\beta_ф, \beta_e << 1$, то импульс частицы $p \approx mc\beta_e$, и удобнее рассматривать уравнения не для энергии, а для относительной скорости частиц β_e. Будем рассматривать малые колебания относительно равновесной частицы, имеющей скорость, равную фазовой скорости волны, которую считаем постоянной $\beta_{es} = \beta_ф = const$. Уравнения для отклонения скорости частицы от равновесной $\beta' = \beta_e - \beta_ф$ и для отклонения фазы от равновесной $\phi = \varphi - \varphi_s$ есть

$$\frac{d\beta'}{dt} = \frac{eE_0}{mc} \cdot \left[e^{az} \cdot \cos(\phi + \varphi_s) - e^{az_s} \cdot \cos\varphi_s \right],$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega\,\beta'}{\beta_ф}. \qquad (2.17)$$

Выражение в квадратных скобках при малых колебаниях ($\phi << 1$) вокруг равновесной частицы с $\varphi_s = \pi/2$ равно

$$e^{az} \cdot \cos(\phi + \varphi_s) - e^{az_s} \cdot \cos\varphi_s \Big|_{\phi << 1} \approx$$

$$\approx \cos\varphi_s \cdot \left(e^{az} - e^{az_s}\right) - \phi \cdot \sin\varphi_s \cdot e^{az} \Big|_{\varphi_s = \pi/2} = -\phi \cdot e^{az}. \qquad (2.18)$$

Фаза колебания $\varphi = \beta z - \omega t$ тогда

$$az = \frac{a}{\beta} \cdot (\varphi + \omega t) = \frac{a}{\beta} \cdot (\phi + \varphi_s + \omega t) \approx \frac{\pi a}{2\beta} + \frac{a\omega}{\beta} \cdot t. \qquad (2.19)$$

$$\frac{d\beta'}{dt} = -\phi \cdot \frac{eE_0 \cdot \exp(\pi a / 2\beta)}{\beta_ф mc} \cdot \exp\left(\frac{a\omega}{\beta} \cdot t\right) = -\phi \cdot A \cdot \exp(\alpha t). \qquad (2.20)$$

Дифференцируя второй раз уравнение для ϕ при постоянной фазовой скорости волны $\beta_ф$, получим

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{\omega}{\beta_ф} \cdot \frac{d\beta'}{dt} = -\phi \cdot \frac{\omega A}{\beta_ф} \cdot \exp(\alpha t). \qquad (2.21)$$

Делая замену переменной $x = 2 \cdot \exp(\alpha t / 2)$, имеем

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dx} = \frac{\alpha x}{2} \cdot \frac{d}{dx},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{d}{dx} = \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{\alpha x}{2}\right) \cdot \frac{d}{dx}, \qquad (2.22)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{d\phi}{dx}+\frac{\omega\,A}{\alpha^2\beta_\phi}\cdot\phi=0\,. \qquad (2.23)$$

Это – уравнение Бесселя нулевого порядка, решением которого является функция $Z_0(v)$ – линейная комбинация функций Бесселя и Неймана. Окончательно решение для ϕ запишется

$$\phi\sim Z_0\left(2\cdot\sqrt{\frac{\omega\,A}{\alpha^2\beta_\phi}}\cdot\exp\left(\frac{\alpha\,t}{2}\right)\right). \qquad (2.24)$$

Огибающая решения с возрастанием аргумента ведет себя как корень квадратный от аргумента

$$\tilde{\phi}\sim\frac{1}{\sqrt{v}}\sim\exp\left(-\frac{\alpha\,t}{4}\right)=\exp\left(-\frac{a\omega\,t}{4\beta}\right). \qquad (2.25)$$

То есть амплитуда фазовых колебаний затухает с декрементом, в 4 раза меньшим инкремента амплитуды поля.

Это же результат можно получить гораздо проще, используя адиабатическое приближение. Так как выражение $|\phi|^2\cdot\Omega$ есть адиабатический инвариант малых фазовых колебаний, а $\Omega^2(z)\sim E(z)\sim\exp(a\,z)$, то амплитуда фазовых колебаний будет $|\phi(z)|\sim\exp\left(-\frac{a\,z}{4}\right)$. Используя то же приближение $z\approx\frac{\omega}{\beta}\cdot t$, получим зависимость $|\phi(z)|\sim\exp\left(-\frac{a\omega\,t}{4\beta}\right)$.

Глава 3
НЕСИНХРОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Ранее были выведены уравнения продольной динамики в одночастичном одноволновом приближении, которые можно переписать как

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = e \cdot E_0(z) \cdot cos\,\varphi\,,$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{\beta_e} - \frac{1}{\beta_\phi} \right), \qquad (3.1)$$

где $\beta_\phi = \frac{v_\phi}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\omega}{\beta}$ - относительная фазовая скорость гармоники, $\beta_e = \frac{v_e}{c}$ - относительная скорость частицы.

Будем рассматривать ускорение частицы с постоянной скоростью (например, релятивистской с $\beta_e \approx 1$) в ускоряющей секции с постоянным градиентом $E_0(z) = E_0$ и постоянной фазовой скоростью β_ϕ. Если скорость частицы и фазовая скорость волны постоянны вдоль секции, то

$$\varphi = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{\beta_e} - \frac{1}{\beta_\phi} \right) \cdot z + \varphi_0 = \left(\frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{\beta_e} - \beta \right) \cdot z + \varphi_0 = \widetilde{\beta} \cdot z + \varphi_0\,, \qquad (3.2)$$

где φ_0 - относительная фаза влета ускоряемой частицы в секцию.

Пройдя секцию длиной L, частица увеличит свою энергию на

$$\varepsilon = e \cdot E_0 \cdot \int_0^L \cos\left(\widetilde{\beta}\, z + \varphi_0\right) dz = \varepsilon_0 \cdot \frac{\sin\left(\widetilde{\beta}\, L/2\right)}{\widetilde{\beta}\, L/2} \cdot \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}\, L}{2} + \varphi_0 \right), \qquad (3.3)$$

где $\varepsilon_0 = e \cdot E_0 \cdot L$.

Для синфазной частицы $\beta_\phi = \beta_e = 1 \Rightarrow \widetilde{\beta} = 0$. Если начальная фаза влета частицы в секцию $\varphi_0 = 0$, то максимальная набираемая энергия $\varepsilon = \varepsilon_0$. Заметим, что при скольжении по фазе максимум набираемой энергии соответствует начальной фазе $\varphi_0 = -\widetilde{\beta}\, L/2$. Из (3.3) видно, что при скольжении по фазе набираемая частицей энергия $\varepsilon \neq \varepsilon_0$. Считаем, что частица ультрарелятивистская $\beta_e = 1$:

$$\widetilde{\beta} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{\beta_e} - \frac{1}{\beta_\phi} \right)\Bigg|_{\beta_e = 1} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\beta_\phi - 1}{\beta_\phi} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\delta\,\beta_\phi}{\beta_\phi}\,. \qquad (3.4)$$

Так как $\beta_{\phi} = \dfrac{\omega}{c\,\beta}$, то

$$\delta\,\beta_{\phi} = \frac{\delta\,\omega}{c\,\beta} - \frac{\delta\,\beta}{c\,\beta^2} = \beta_{\phi}\cdot\frac{\delta\,\omega}{\omega}\cdot\left(1-\frac{\beta_{\phi}}{\beta_{\text{гр}}}\right), \qquad (3.5)$$

где $\beta_{\text{гр}} = \dfrac{v_{\text{гр}}}{c} = \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\delta\omega}{\delta\beta}$ – относительная групповая скорость.

При $\beta_{\text{гр}} << 1$ окончательно получим

$$\widetilde{\beta} \approx -\frac{2\,\pi}{\lambda}\cdot\frac{\delta\,\omega}{\omega}\cdot\frac{1}{\beta_{\text{гр}}}\,. \qquad (3.6)$$

Рассмотрим несколько причин, приводящих к скольжению по фазе.

1. Частица, двигаясь со скоростью, отличной от фазовой скорости волны, может через некоторое время оказаться в тормозящем поле волны и двигаться в нем некоторое время. В случае, если $\varphi_0 = 0$, а $\widetilde{\beta}\,L = \pi$, набор энергии $\varepsilon = 0$. То есть в этом примере частица проведет половину времени в ускоряющем поле, а половину в тормозящем и, как следствие, пройдя секцию, не увеличит свою энергию. Это может произойти, если, например, частота задающего генератора отличается от рабочей частоты секции на

$$\widetilde{\beta}\,L = \pi \;\Rightarrow\; \Delta\,f = f_0\cdot\frac{\lambda_0\beta_{\text{гр}}}{2\cdot L}, \qquad (3.7)$$

где $f_0 = \dfrac{c}{\lambda_0}$ - рабочая частота секции.

<u>*Пример*</u>: рабочая частота секции $f_0 = 2856$ МГц,
длина секции $L =$ 3 м,
относительная групповая скорость $\beta_{гр} = 0{,}02$.

Тогда $\Delta\,f = 2856\cdot\dfrac{0{,}105\cdot 0{,}02}{2\cdot 3} = 1$ МГц.

Если сгусток имеет фазовую протяженность 2φ, то при $\widetilde{\beta} = 0$ максимальная и минимальная энергия электронов в сгустке после пролета секции будут равны

$$\varepsilon_{0max} = \varepsilon_0\,,$$
$$\varepsilon_{0min} = \varepsilon_0\cdot\cos\varphi\,. \qquad (3.8)$$

Допустимый энергетический разброс пучка на выходе секции, вызванный фазовой протяженностью сгустка, обычно ~ 1 %, что соответствует

$2\varphi \approx 20^{\circ}$. Определим вклад, который вносят эффекты несинхронного взаимодействия для сгустка фазовой протяженности 2φ, как

$$\delta = \frac{\varepsilon_{0min} - \varepsilon(\tilde{\beta})}{\varepsilon_{0max}}, \tag{3.9}$$

где $\varepsilon(\tilde{\beta})$ - минимальная энергия, набираемая при $\tilde{\beta} \neq 0$. При $\tilde{\beta}\, L << 1$ получим

$$\delta = \frac{\tilde{\beta}\, L}{2} \cdot \sin\varphi + \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{\tilde{\beta}\, L}{2}\right)^2 \cdot \cos\varphi\,. \tag{3.10}$$

Отсюда при малых φ имеем

$$\tilde{\beta}\, L \approx \sqrt{6 \cdot \delta + \frac{9}{4} \cdot \varphi^2} - \frac{3}{2} \cdot \varphi\,. \tag{3.11}$$

При φ=0 $\tilde{\beta}\, L \approx \sqrt{6 \cdot \delta}$, а при конечном φ, как в нашем случае, можно пренебречь квадратичным членом, и тогда

$$\tilde{\beta}\, L \approx \frac{2\,\delta}{\sin\varphi}\,. \tag{3.12}$$

Если задан допустимый энергетический разброс пучка на выходе секции, вызванного несинхронным взаимодействием δ, то можно оценить необходимую стабильность питающего генератора

$$\frac{\delta\omega}{\omega} \approx \frac{\lambda\beta_{\text{гр}}}{\pi L} \cdot \frac{\delta}{\sin\varphi}\,. \tag{3.13}$$

<u>*Пример*</u>: рабочая частота секции $f = 2856$ МГц,

рабочая длина волны $\lambda = 0{,}105$ м,

длина секции $L =$ 3 м,

относительная групповая скорость секции $\beta_{\text{гр}} = 0{,}02$,

протяженность сгустка $2\,\varphi = 2 \cdot 10^{\circ}$,

допустимый энергетический разброс $\delta = 0{,}005$.

Необходимая стабильность питающего генератора

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \pm\, 6{,}4 \cdot 10^{-6} \quad (\delta\, f \approx \pm 18 \text{ кГц}).$$

2. Фазовая скорость волны может отличаться от скорости частицы не только из-за нестабильности генератора, но и из-за неточности изготовления самой секции

$$\widetilde{\beta}\, L = \Big|_{\beta_e = 1} = \frac{2\pi L}{\lambda} \cdot \frac{\delta\, \beta_ф}{\beta_ф} = \frac{2\pi L}{\lambda} \cdot \frac{\delta\, v_ф}{v_ф}. \qquad (3.14)$$

Или при заданном δ и φ

$$\frac{\delta\, v_ф}{v_ф} = \frac{\lambda}{2\pi L} \cdot \sqrt{6 \cdot \delta + \frac{9}{4} \cdot \varphi^2} - \frac{3}{2} \cdot \varphi\,. \qquad (3.15)$$

Для предыдущего примера $\frac{\delta\, v_ф}{v_ф} \approx 3 \cdot 10^{-4}$. Фазовая скорость волны зависит от многих размеров ячейки, в частности, от периода ячейки

$$v_ф = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi\, f \cdot d}{\theta}, \text{ или } \frac{\delta\, v_ф}{v_ф} = \frac{\delta\, d}{d} = 3 \cdot 10^{-4}. \qquad (3.16)$$

Здесь d – период ячейки, θ – сдвиг фазы на ячейку.
При размере ячейки d = 33 мм ($\theta = 2\pi / 3$) $\delta\, d \approx 10$ мкм. С такой точностью необходимо выдержать период ячейки при изготовлении структуры.

3. Из-за тепловых потерь в стенках структуры происходит ее разогрев. И, как следствие, изменение геометрических размеров секции, а вместе с ними и рабочей частоты секции. Поэтому для обеспечения допустимого энергетического разброса пучка на выходе секции δ необходимо поддерживать температуру секции специальной системой термостабилизации с точностью

$$\delta\, t = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\lambda \beta_{гр}}{\pi L} \cdot \frac{\delta}{\sin\varphi}, \qquad (3.17)$$

где η - коэффициент термического расширения металла, из которого сделана секция. Для меди при комнатной температуре $\eta = 1{,}67 \cdot 10^{-5}$. Тогда для предыдущего примера можно оценить стабильность средней температуры секции при заданном допустимом энергетическом разбросе пучка $\delta = \pm 0{,}5\ \%$:

$$\delta\, t = \pm \frac{5{,}8 \cdot 10^{-6}}{1{,}67 \cdot 10^{-5}} \approx \pm 0{,}4^{\circ}. \qquad (3.18)$$

4. В ускоряющей структуре с постоянным градиентом тепловыделение в стенках структуры идет равномерно по длине УС, так как в ней $\frac{dP}{dz} = const$. В структуре с постоянным импедансом распределение

мощности по длине УС $P(z) = P_0 \cdot e^{-2\alpha z}$. То есть тепловыделение в начале секции больше, чем в конце. Распределение температуры вдоль секции приведет к изменению собственной частоты ячеек вдоль секции $\frac{\delta\omega(z)}{\omega} = \eta \cdot \delta\, t(z)$. Из-за большой теплопроводности стенок структуры, изготовленных из меди, можно считать, что в первом приближении температура вдоль секции меняется линейно $\delta\, t(z) = \Delta T \cdot \frac{z}{L}$, где ΔT - полный перепад температуры на секции. Набор энергии в такой секции

$$\varepsilon = e \cdot E_0 \cdot \int_0^L \cos\left[\tilde{\beta}(z) \cdot z + \varphi\right] dz\,, \tag{3.19}$$

где $\tilde{\beta}(z) = \frac{2\pi}{\lambda\beta_{\text{гр}}} \cdot \frac{\delta\omega}{\omega} = \eta \cdot \frac{2\pi}{\lambda\beta_{\text{гр}}} \cdot \delta\, t(z) = \frac{2\pi \cdot \eta \cdot \Delta T}{\lambda\beta_{\text{гр}}} \cdot \frac{z}{L} = \tilde{\beta}_0 \cdot \frac{z}{L}$.

При малых $\tilde{\beta}\, z$ и малых, но конечных φ имеем

$$\varepsilon \approx e \cdot E_0 \cdot \left[\cos\varphi \cdot L - \sin\varphi \cdot \int_0^L \frac{\tilde{\beta}_0 z^2 dz}{L}\right] = \varepsilon_0 \cdot \left(\cos\varphi - \sin\varphi \cdot \frac{\tilde{\beta}_0 L}{3}\right). \tag{3.20}$$

Или

$$\delta \approx \sin\varphi \cdot \frac{\tilde{\beta}_0 L}{3} = \sin\varphi \cdot \frac{2\pi \cdot \eta \cdot \Delta T \cdot L}{3\lambda\beta_{\text{гр}}}\,, \tag{3.21}$$

откуда допустимый перепад температуры при заданном δ равен

$$\Delta T = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\lambda\beta_{\text{гр}}}{\pi L} \cdot \frac{\delta}{\sin\varphi} = \frac{3}{2} \cdot \delta\, t\,. \tag{3.22}$$

Для предыдущего примера полный перепад температуры на секции должен поддерживаться на уровне $\Delta T \approx \pm 0{,}6^{\circ}$.

Если известна рабочая температура секции, то можно сделать так, чтобы перепад температуры вдоль секции был симметричным относительно центра секции: $\delta\, t(z) = \Delta T \cdot \frac{z - L/2}{L}$. Очевидно, что при симметричном перепаде температуры в линейном приближении $\delta = 0$ для любого малого φ, так как половину пути пучок будет интегрально изменять энергию в одну сторону, а вторую половину пути ровно на столько же в другую. Для вычисления δ в этом случае необходимо сохранить квадратичный член в

разложении $\cos\left[\widetilde{\beta}\,(z)\cdot z+\varphi\right]$. С учетом того, что интеграл по линейному члену равен нулю, имеем

$$\varepsilon \approx e\cdot E_0\cdot\left\{\cos\varphi\cdot L-\cos\varphi\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^L\left[\beta_0\cdot\frac{(z-L/2)\cdot z}{L}\right]^2 dz\right\}=$$

$$=\varepsilon_0\cdot\left(\cos\varphi-\cos\varphi\cdot\frac{\left(\widetilde{\beta}_0 L\right)^2}{60}\right). \qquad (3.23)$$

Или

$$\delta \approx \frac{\left(\widetilde{\beta}_0 L\right)^2}{60}=\frac{1}{60}\cdot\left[\frac{2\pi\cdot\eta\cdot\Delta T\cdot L}{\lambda\beta_{\text{гр}}}\right]^2. \qquad (3.24)$$

Откуда допустимый перепад температуры ΔT при заданном δ равен

$$\Delta T=\sqrt{15\cdot\delta}\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\frac{\lambda\beta_{\text{гр}}}{\pi L}. \qquad (3.25)$$

Для предыдущего примера - $\Delta T\approx\pm 3{,}6^{\circ}$. То есть примерно в 6 раз больше, чем при несимметричном перепаде температуры вдоль секции.

Глава 4

ПОПЕРЕЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ

Обычно при рассмотрении поперечного движения для упрощения пренебрегают влиянием на него продольного движения, то есть считают продольное движение заданным. Поперечные скорости и смещения считаются малыми (так называемое параксиальное приближение).

Рассмотрим сначала поперечное движение частиц только в действующем ускоряющем ВЧ-поле. Уравнение радиального движения в цилиндрических координатах r, θ, z можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(m\gamma\frac{dr}{dt}\right)=m\gamma r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+F_{rE}\,, \tag{4.1}$$

где первое слагаемое в правой части $F_{rC}=m\gamma r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{m\gamma v_\theta^2}{r}$ - центробежная сила инерции, $v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}$ - азимутальная скорость, F_{rE} - радиальная составляющая силы Лоренца действующего ускоряющего поля.

Для аксиально-симметричных ВЧ-полей типа ТМ в цилиндрической системе координат $E_\theta=0$, $B_r=B_z=0$. Из уравнений Максвелла имеем

$$\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,B_\theta\right),$$

$$\operatorname{div}\vec{E}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial E_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,E_r\right)=0\,.$$

На оси $E_r=B_\theta=0$. Для точек, близких к оси, E_z в первом приближении не зависит от r. Тогда, интегрируя уравнения по r, получим

$$E_r\approx-\frac{r}{2}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial z}\,,$$

$$B_\theta\approx\frac{r}{2c^2}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial t}\,. \tag{4.2}$$

Радиальная составляющая силы Лоренца есть

$$F_{rE}=e\left(E_r-\beta\,c\,B_\theta\right)=-\frac{er}{2}\cdot\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}+\frac{\beta}{c}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial t}\right). \tag{4.3}$$

Перейдем от переменных z и t к безразмерной координате $\xi = z/\lambda$ и фазе $\varphi = \omega\left(\int_0^z \frac{dz}{\beta_\phi c} - t\right)$, где β_ϕ - относительная фазовая скорость ускоряющей гармоники при движении частицы в поле бегущей волны. Дополнительно для упрощения полагаем, что вращения нет, то есть $v_\theta = 0$.Уравнение для поперечного движения запишется в виде

$$\frac{d}{d\xi}\left(\beta\gamma\frac{dr}{d\xi}\right) = -\frac{er\lambda}{mc^2\beta}\cdot\left[\frac{\partial E_z}{\partial\xi} + \frac{2\pi}{\beta_\phi}\left(1 - \beta_\phi\beta\right)\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}\right]. \qquad (4.4)$$

При чисто гармонической волне постоянной амплитуды первый член исчезает. Однако в общем случае, при описании краевых эффектов он существен. Например, оценим преломление траектории синхронной частицы при входе в ускоряющую секцию из области, где $E_z = 0$, то есть при ступенчатой зависимости

$$E_z(z,t) = E_0\,\sigma(z)\cos\varphi(z,t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad z < 0 \\ E_0\cos\varphi(z,t) & \text{при} \quad z \geq 0 \end{cases}.$$

Проинтегрируем уравнение с таким распределением поля по траектории движения до момента, когда частица только влетит в секцию:

$$\Delta\left(\beta\,\gamma\frac{dr}{d\xi}\right) = -\frac{e\,r\,\lambda^2}{2mc^2\beta}\int_{-\infty}^{+0}\frac{\partial E_z}{\partial z}dz = -\frac{e\,r\,\lambda^2\,E_0}{2mc^2\beta} = -\frac{r\lambda\,G}{2\beta}, \qquad (4.5)$$

где $G = eE_0\lambda/m_0c^2$.

То есть при входе в ускоряющую секцию из области, где нет поля, траектории частиц повернутся на угол

$$\alpha = \Delta\left(\frac{dr}{dz}\right) = -\frac{rG}{2\beta^2\gamma}, \qquad (4.6)$$

где все значения взяты в момент влета. При малой энергии инжекции такая “краевая линза” может дать ощутимый угловой разброс.

В действующем аксиально-симметричном поле волны постоянной амплитуды $\partial E_z/\partial\omega = -E_0\sin\varphi$. Тогда уравнение поперечного движения в нем запишется в виде

$$\frac{d}{d\xi}\left(\beta\,\gamma\frac{dr}{d\xi}\right) \approx \frac{\pi\,erE_0\,\lambda\sin\varphi}{mc^2\beta_\phi\beta}\left(1 - \beta_\phi\beta\right) = \frac{\pi\,r\,G\sin\varphi}{\beta_\phi\beta}\cdot\left(1 - \beta_\phi\beta\right). \qquad (4.7)$$

Для ускорителя на большие энергии при $\beta_\phi = 1$, $\beta \to 1$;

$\sin\varphi \to \sin\varphi_\infty \approx 0$. Поэтому правая часть уравнения стремится к нулю и всякое действие ВЧ-поля на поперечное движение исчезает. Интегрирование уравнения (4.7) с нулевой правой частью дает

$$\beta\,\gamma\frac{dr}{d\xi} = \lambda\,\gamma_{\text{инж}}\beta_{\text{инж}}\alpha_{\text{инж}} = const\,, \tag{4.8}$$

где $\alpha_{\text{инж}} = \frac{1}{\lambda}\cdot\left.\frac{dr}{d\xi}\right|_{\text{инж}}$ – начальный угол траектории с осью z. Интегрируя (4.8) еще раз с учетом того, что $d\gamma/d\xi = G\cos\varphi \approx \mathrm{G}\cos\varphi_\infty = const$ и $\beta \approx 1$, получим

$$r \approx r_{\text{инж}} + \frac{\lambda(\alpha\beta\gamma)_{\text{инж}}}{G\cos\varphi_\infty}\cdot\ln\frac{\gamma}{\gamma_{\text{инж}}}\ . \tag{4.9}$$

То есть при релятивистском движении с увеличением энергии в процессе ускорения происходит очень медленный рост поперечных размеров пучка. Поэтому в ускорителе легких частиц (электронов) на основной его части можно вообще обойтись без внешней фокусировки, если обеспечить достаточно малый угловой разброс пучка на входе.

В случае нерелятивистских частиц - протонов и других более тяжелых ионов уравнения движения при $\beta, \beta_\phi << 1$ ($\gamma \approx 1$) для синхронной частицы запишутся

$$\frac{d}{d\xi}\left(\beta\frac{dr}{d\xi}\right) = \frac{\pi\, r\, G\sin\varphi_s}{\beta^2}\,,$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\beta^2}{2}\right) = G\cos\varphi_s\,, \tag{4.10}$$

где φ_s - фаза синхронной частицы. Проинтегрируем второе уравнение

$$\beta = \sqrt{\beta_{\text{инж}}^2 + 2\,\xi\, G\cos\varphi_{\text{s}}}\ ,$$

где $\beta_{\text{инж}}$ - относительная фазовая скорость инжекции при $\xi = 0$.

Для решения первого уравнения выберем в качестве новой переменной β:

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{d\beta}{d\xi}\cdot\frac{d}{d\beta} = \frac{G\cos\varphi_{\text{s}}}{\beta}\cdot\frac{d}{d\beta}\,.$$

Уравнение для поперечного движения перепишутся в виде

$$\frac{G\cos\varphi_s}{\beta}\cdot\frac{d}{d\beta}\left(\beta\cdot\frac{G\cos\varphi_s}{\beta}\cdot\frac{dr}{d\beta}\right) = \frac{\pi\, r\, G\sin\varphi_s}{\beta^2}\,. \tag{4.11}$$

Или

$$\frac{d^2 r}{d\beta^2} - \frac{\pi \ \sin\varphi_s}{\beta\, G \cos^2 \varphi_s} \cdot r = 0 \,. \qquad (4.12)$$

Полученное уравнение своим частным решением имеет функцию $\beta^{1/2}(\xi)\, I_1\left(\sqrt{\frac{4\pi \sin\varphi_s}{G\cos^2\varphi_s}} \cdot \beta(\xi)\right)$ – модифицированную функцию Бесселя первого порядка, которая почти экспоненциально растет с возрастанием аргумента. Поэтому для ускорителей ионов и в начальной части электронных ускорителей необходима внешняя фокусировка.

Раскроем левую часть уравнения для поперечного движения и разделим все на $\beta\,\gamma$

$$\frac{d^2 r}{d\xi^2} + \frac{dr}{d\xi} \cdot \frac{d}{d\xi}\left[\ln(\beta\,\gamma)\right] = \frac{\pi\, r\, G \sin\varphi}{\beta_\phi \beta^2\, \gamma} \cdot \left(1 - \beta_\phi \beta\right). \qquad (4.13)$$

Коэффициент при первой производной в правой части уравнения мал, так как $\ln(\beta\,\gamma)$ - медленная функция времени. Если рассматривать движение в ограниченных интервалах времени, то вторым слагаемым в правой части уравнения можно пренебречь. Тогда для синхронной частицы с $\beta = \beta_\phi$ имеем

$$\frac{d^2 r}{d\xi^2} - \frac{1}{2}\Omega_\xi^2\, r = 0 \,, \qquad (4.14)$$

где $\Omega_\xi = \sqrt{\frac{2\pi\, G \sin\ \varphi_s}{\beta_\phi^3\, \gamma_s^3}}$ – ранее введенная частота малых фазовых колебаний, а само уравнение для малых фазовых колебаний имеет вид

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} + \Omega_\xi^2\, \phi = 0 \,. \qquad (4.15)$$

Из сравнения уравнений (4.14) и (4.15) видно, что условия устойчивости для продольных и поперечных колебаний в бегущей волне несовместимы: если $\sin\varphi_s > 0$, то $\Omega_\xi^2 > 0$ и продольные колебания частиц устойчивы, но поперечные колебания оказываются неустойчивыми.

Глава 5

УЧЕТ СИЛ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Учет кулоновских полей сгустка при расчете динамики частиц в ускорителях является наиболее трудным вопросом теории. При учете этих полей нельзя рассматривать независимо поперечные и продольные колебания даже в одночастичном приближении. Продольное изменение размера сгустка влечет за собой изменение плотности сгустка, что, в свою очередь, ведет к изменению поперечных размеров сгустка, и наоборот. Учет пространственного заряда даже при численных расчетах динамики пучка не так прост. Трудно учитываемыми оказываются два эффекта. Движение сгустка в высокодобротной периодической ускоряющей структуре приводит к большой величине полей излучения, влияние которых на движение частиц внутри сгустка может оказаться сравнимым с влиянием кулоновских сил даже в нерелятивистском случае. Кроме того, приходится как-то считаться с тем, что сгусток движется не в свободном пространстве, а в ограниченном по радиусу канале, да еще с периодическими граничными условиями. Поэтому статическое поле сгустка необходимо вычислять с учетом граничных условий на металлической поверхности канала структуры. Последнее обычно делают в приближении движения сгустка в полой металлической трубе, имеющей постоянный диаметр порядка апертуры структуры (модель Дж. Роу). Поэтому аналитический учет сил пространственного заряда носит лишь оценочный характер.

Поля пространственного заряда сгустка обычно рассматривают в приближении равномерно заряженного, простого по форме осесимметричного тела вращения. Это может быть либо цилиндр, либо эллипсоид вращения. Модель эллипсоида вращения чаще используется для аналитического рассмотрения движения сгустка. Модель цилиндра удобнее для численных расчетов продольной динамики с учетом сил пространственного заряда. При оценке влияния собственного заряда пучка на динамику его движения считается, что отклонения плотности заряда от равновесного незначительны.

Рассмотрим сгусток в виде равномерно заряженного эллипсоида вращения с полуосями a и b $(a < b)$. Перейдем в систему, движущуюся со скоростью синхронной частицы сгустка $v = \beta_s c = \beta_\phi c$ вдоль оси z. При таком переходе в сопровождающей системе координат будем иметь

$$x' = x\,,$$
$$y' = y\,,$$
$$r' = r \quad \Rightarrow \quad a' = a\,,$$
$$z' = \gamma z \;\Rightarrow\; b' = \gamma b\,.$$

Так как полный заряд должен сохраняться, то его плотность станет $\rho' = \rho / \gamma$. В новой системе имеем статический равномерно заряженный эллипсоид вращения.

Для него в системе СИ $$E'_z = \frac{\rho'}{\varepsilon_0} k'(z' - z'_c), \qquad (5.1)$$

а для любителей системы СГСЕ - $E'_z = 4\pi\rho' k'(z' - z'_c)$.

Здесь z' и z'_c - текущая z -координата и координата центра эллипсоида,

$$k' = \frac{1 - p'^2}{p'^3}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+p'}{1-p'} - p'\right), \qquad (5.2)$$

где $p' = \sqrt{1 - (a'/b')^2} = \sqrt{1 - (a/\gamma b)^2}$, a' и b' – размеры полуосей в новой системе отсчета.

Для неподвижного сгустка магнитные поля отсутствуют $\vec{B}' = 0$, $E'_\theta = 0$, а для поперечной компоненты E'_r из уравнений Максвелла имеем

$$\operatorname{div}\vec{E}' = \frac{\rho'}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r'}\cdot\frac{\partial}{\partial r'}(r' E'_r) = \frac{\rho'}{\varepsilon_0} - \frac{\partial E'_z}{\partial z'}. \qquad (5.3)$$

В первом приближении для точек, близких к оси, E'_z не зависит от r'. Тогда, интегрируя по r', получим

$$E'_r \approx \frac{r'}{2}\cdot\left(\frac{\rho'}{\varepsilon_0} - \frac{\partial E'_z}{\partial z'}\right) = \frac{\rho'}{2\varepsilon_0}(1 - k')r'. \qquad (5.4)$$

Отметим, что полученное таким способом выражение E'_r для эллипсоида совпадает с точным решением. При переходе обратно в лабораторную систему отсчета

$$E_z = E'_z,$$
$$\vec{E}_\perp = \gamma\,\vec{E}'_\perp,$$
$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\left[\vec{v}\times\vec{E}\right]. \qquad (5.5)$$

Тогда в лабораторной системе отсчета имеем

$$E_z = E'_z = \frac{\rho'}{\varepsilon_0} k'(z' - z'_c) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} k'(z - z_c),$$

$$E_r = \gamma\, E'_r = \frac{\gamma\,\rho'}{2\,\varepsilon_0}(1 - k')r' = \frac{\rho}{2\,\varepsilon_0}(1 - k')r,$$

$$B_\theta = \frac{\beta}{c}\cdot E_r. \qquad (5.6)$$

На длине сгустка фазовая скорость считается постоянной, поэтому

$$\varphi - \varphi_c = \omega \cdot \left(\int_0^z \frac{dz}{v_\phi} - t \right) - \omega \cdot \left(\int_0^{z_c} \frac{dz}{v_\phi} - t \right) \approx \frac{\omega \cdot (z - z_c)}{\beta_\phi c}. \qquad (5.7)$$

Подставляя $z - z_c = \frac{v_s}{\omega} \cdot (\varphi - \varphi_c) = \frac{\beta_s \lambda}{2\pi} \cdot (\varphi - \varphi_c)$ в выражение для E_z, получим

$$E_z = \frac{\rho\, \beta_\phi \lambda}{2\pi\, \varepsilon_0} k'(\varphi - \varphi_c). \qquad (5.8)$$

Радиальная составляющая силы поля пространственного заряда $F_{rQ} = e\left(E_r - \beta\, c\, B_\theta\right)$. То есть эффективно действующее поперечное электрическое поле в лабораторной системе координат равно

$$E_{r\,э} = E_r - \beta\, c\, B_\theta = E_r\left(1 - \beta^2\right) = \frac{\rho}{2\gamma^2 \varepsilon_0} \cdot (1 - k')r. \qquad (5.9)$$

В дальнейшем под поперечным электрическим полем, действующим на заряженную частицу в лабораторной системе координат, будем понимать эффективно действующее поперечное поле $E_r \equiv E_{r\,э}$.

В нерелятивистском случае $\gamma \approx 1$, а $k' \approx k$. То есть E_z (см. 5.6) и $E_{r\,э}$ (см. 5.9) не зависят от энергии сгустка. Для релятивистского сгустка

$$b' = \gamma\, b >> a\,,\ p' \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{\gamma\, b}\right)^2,\ k' \approx 2 \cdot \left(\frac{a}{\gamma\, b}\right)^2,$$

$$E_z \approx \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\beta_\phi \lambda}{2\pi} \cdot \left(\frac{2a}{b}\right)^2 \cdot (\varphi - \varphi_c),$$

$$E_r \approx \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \cdot r. \qquad (5.10)$$

Это очень важный момент – в ультрарелятивистском сгустке ($\gamma \to \infty$) исчезают силы кулоновского взаимодействия между частицами.

Влияние пространственного заряда на продольное движение

Рассматривая движение неравновесных частиц относительно равновесной, с учетом поля пространственного заряда можно записать:

$$\frac{d\gamma'}{d\xi} = \frac{e\lambda}{mc^2}\left[E_0 \cos(\phi + \varphi_s) - E_0 \cos\varphi_s + \frac{\rho\,\beta_\phi \lambda}{2\pi\,\varepsilon_0} k'\phi\right],$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{\beta_\phi} - \frac{1}{\beta}\right), \qquad (5.11)$$

где $\gamma' = \gamma - \gamma_s$ - разность энергий неравновесной частицы и равновесного значения γ_s,

$\phi = \varphi - \varphi_s$ - разность фазы неравновесной и равновесной частиц,

$\xi = z / \lambda$.

Для малых фазовых колебаний

$$\frac{1}{\beta} \approx \frac{1}{\beta_\phi} + \gamma' \cdot \frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta_\phi} + \gamma' \cdot \frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}\right) = \frac{1}{\beta_\phi} - \frac{1}{\beta_\phi^3 \gamma_s^3} \cdot \gamma',$$

$$\frac{d\gamma'}{d\xi} = \frac{e\lambda}{mc^2}\left(-E_0 \sin\varphi_s + \frac{\rho\,\beta_\phi \lambda}{2\pi\,\varepsilon_0} k'\right)\phi,$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{2\pi}{\beta_\phi^3 \gamma_s^3} \cdot \gamma'. \qquad (5.12)$$

Дифференцируя второй раз уравнение для ϕ, получим

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = \frac{2\pi}{\beta_\phi^3 \gamma_s^3} \cdot \frac{d\gamma'}{d\xi} = -\left(\Omega_\xi^2 - \frac{e\lambda}{mc^2} \cdot \frac{2\pi}{\beta_\phi^3 \gamma_s^3} \cdot \frac{\rho\,\beta_\phi \lambda}{2\pi\,\varepsilon_0} k'\right) \cdot \phi = -\widetilde{\Omega}_\xi^2 \cdot \phi, \qquad (5.13)$$

где $\Omega_\xi = \sqrt{\dfrac{2\pi\, eE_0 \lambda \cdot \sin\varphi_s}{mc^2 \beta_\phi^3 \gamma_s^3}}$ – полученная ранее частота малых фазовых колебаний по отношению к переменной ξ без учета сил пространственного заряда.

При токе ускоряемых частиц, равном I, заряд каждого сгустка $Q = I / f = I\,\lambda / c$, где f - частота следования сгустков или, что то же самое, рабочая частота ускорителя. Объем эллипсоида вращения $V = \frac{4}{3}\pi\, a^2 b$. Плотность заряда равномерно заряженного сгустка в лабораторной системе отсчета

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3I\,\lambda}{4\pi\, c\, a^2 b}. \qquad (5.14)$$

Частота малых фазовых колебаний запишется

$$\widetilde{\Omega}_{\xi}^{2} = \frac{e\lambda}{mc^{2}} \cdot \frac{2\pi}{\beta_{\phi}^{3}\gamma_{s}^{3}} \cdot \left(E_{0} \sin\varphi_{\text{s}} - \frac{\beta_{\phi}\lambda}{2\pi} \cdot \frac{3I\,\lambda\,Z_{0}}{4\pi\,a^{2}b} \cdot k' \right), \qquad (5.15)$$

где $Z_{0} = \dfrac{1}{\varepsilon_{0}\,c} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_{0}\mu_{0}}}{\varepsilon_{0}} = \sqrt{\dfrac{\mu_{0}}{\varepsilon_{0}}} = 120\,\pi$ Ом – сопротивление свободного пространства.

Продольное движение частицы вблизи ее равновесного положения представляют собой устойчивые (ограниченные) синусоидальные колебания при условии $\widetilde{\Omega}_{\xi}^{2} > 0$. То есть

$$E_{0} \sin\varphi_{\text{s}} > \frac{\beta_{\phi}\lambda}{2\pi} \cdot \frac{3I\,\lambda\,Z_{0}}{4\pi\,a^{2}b} \cdot k'. \qquad (5.16)$$

Отсюда можно получить значение предельного тока ускоряемых частиц, ограниченного расталкивающим действием пространственного заряда

$$I_{\text{пред}} = \frac{2\pi\,E_{0}\sin\varphi_{s}}{\beta_{\phi}\lambda} \cdot \frac{4\pi\,a^{2}b}{3\,\lambda\,Z_{0}k'}. \qquad (5.17)$$

Этот же результат можно получить еще проще. Пусть имеется сгусток с угловой длиной 2ϕ. Для малых фазовых колебаний фаза центра сгустка совпадает с синхронной фазой $\varphi_{c} = \varphi_{s}$. Группирующее электрическое поле волны на правом конце сгустка есть $E_{1} = E_{0}\cos(\varphi_{\text{s}} + \phi) - E_{0}\cos\varphi_{\text{s}}$. Если электрическое поле сгустка на его правом конце E_{zQ} превысит группирующее, то сгусток начнет расплываться. На правом краю сгустка электрическое поле без учета полей соседних сгустков, отстоящих на длину волны ускоряющей гармоники, равно (см. 5.6)

$$E_{zQ} = \frac{\rho}{\varepsilon_{0}} k'b. \qquad (5.18)$$

С учетом выражения для плотности заряда в сгустке ρ запишем условие, при котором исчезает группирующее действие ускоряющего поля:

$$E_{0}\left[\cos(\varphi_{s} + \phi) - \cos\varphi_{s}\right] + \frac{3I\,\lambda\,Z_{0}k'b}{4\pi\,a^{2}b} > 0. \qquad (5.19)$$

Разность фазы $\phi = \varphi - \varphi_{s}$ неравновесной и равновесной частиц на правом конце сгустка длиной $2b$ равна

$$\phi = \varphi - \varphi_{s} = \varphi - \varphi_{c} = \omega \cdot \left(\int_{0}^{z_{c}+b} \frac{dz}{v_{\phi}} - t \right) - \omega \cdot \left(\int_{0}^{z_{c}} \frac{dz}{v_{\phi}} - t \right) \approx \frac{\omega\,b}{\beta_{\phi}c} = \frac{2\pi\,b}{\beta_{\phi}\lambda}. \qquad (5.20)$$

При малом ϕ получим

$$\frac{2\pi\, b\, E_0 \sin\varphi_s}{\beta_\phi \lambda} > \frac{3I\, \lambda\, Z_0 k'\, b}{4\pi\, a^2 b} \quad . \tag{5.21}$$

Откуда получим, что значение предельного тока ускоряемых частиц есть

$$I_{\text{пред}} = \frac{2\pi\, E_0 \sin\varphi_s}{\beta_\phi \lambda} \cdot \frac{4\pi\, a^2 b}{3\, \lambda\, Z_0 k'}, \tag{5.22}$$

что совпадает с (5.17).

В релятивистском случае $k' \approx 2 \cdot \left(\frac{a}{\gamma\, b}\right)^2$. Предельный ток равен

$$I_{\text{пред}} = \frac{4\pi^2\, \gamma^2 b^3\, E_0 \sin\varphi_s}{3\, \lambda^2\, Z_0} \quad . \tag{5.23}$$

Из полученных выражений видны основные закономерности, совпадающие с другими моделями: рост предельного тока с энергией, амплитудой поля и равновесной фазой.

Глава 6

ФОКУСИРОВКА СОЛЕНОИДАЛЬНЫМ ПРОДОЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Рассмотрим случай фокусировки постоянным магнитным полем. Механизм такой фокусировки основан на том факте, что частица с малым поперечным импульсом не может существенно сдвинуться поперек достаточно сильного продольного поля B_z, а движется вдоль него по спирали, радиус которой обратно пропорционален B_z, т. е. может быть достаточно мал.

Уравнение радиального движения в цилиндрических координатах r, θ, z можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(m\gamma\,\dot{r}\right) = m\gamma\, r\,\dot{\theta}^2 + F_{rE} + F_{rQ} + F_{rF}\,, \tag{6.1}$$

где первое слагаемое справа

$F_{rC} = m\gamma\, r\,\theta^{\cdot 2} = m\gamma\, v_\theta^2 / r$ - центробежная сила инерции,

$v_\theta = r\,\dot{\theta}$ - азимутальная скорость,

F_{rE} - радиальная составляющая силы Лоренца действующего ускоряющего поля,

F_{rQ} - радиальная составляющая силы поля пространственного заряда,

F_{rF} - радиальная сила внешнего постоянного фокусирующего поля.

В уравнение движения не включена F_{rW} - радиальная сила полей излучения самого сгустка, которой мы пренебрегаем.

Уравнение для азимутальной составляющей движения частицы в цилиндрических координатах

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(m\gamma\, r^2\dot{\theta}\right) = e\left(\dot{z}\cdot B_r - \dot{r}\cdot B_z\right). \tag{6.2}$$

Так как для аксиально-симметричных ВЧ-полей $B_r = B_z = 0$, то в правой части уравнения для азимутальной составляющей стоят только фокусирующие магнитные поля. Поле $\vec{B}$ определяется через вектор-потенциал $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$. Для аксиально-симметричного поля $A_z = A_r = 0$, $A_\theta = A$. Магнитный поток, охватываемый при вращении мгновенного положения частицы вокруг оси z, –

$$\Psi = \int_S \vec{B}\, d\vec{s} = \int_{\Gamma_S} \vec{A}\, d\vec{l} = 2\pi\, rA\,,$$

откуда можно выразить вектор-потенциал A через магнитный поток Ψ

$$A = \frac{\Psi}{2\pi\, r}.$$

Составляющие поля равны: $B_\theta = 0$,

$$B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA) = \frac{1}{2\pi\, r}\frac{\partial \Psi}{\partial r},$$

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi\, r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \qquad (6.3)$$

Подставляя (6.3) в уравнение для азимутальной составляющей, получим

$$\frac{d}{dt}\left(m\gamma\, r^2\dot{\theta}\right) = -\frac{e}{2\pi}\left(\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\Psi}{dz} + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\Psi}{dr}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{e\,\Psi}{2\pi}\right). \qquad (6.4)$$

Откуда получим так называемую теорему Буша:

$$\dot{\theta} = \frac{e}{2m\,\gamma}\cdot\frac{\Psi_0 - \Psi}{\pi\, r^2}, \qquad (6.5)$$

где Ψ_0 будет либо значение Ψ в точке траектории, где $\dot{\theta} = 0$, либо значение $(2\pi\, m\gamma / e) r^2\dot{\theta}$ в точке траектории, где поле отсутствует (Ψ=0). То есть постоянная Ψ_0 определяется условиями ввода пучка в магнитное поле.

В параксиальном приближении B_z вблизи оси не зависит от z. Тогда

$$\Psi = \int_S \vec{B}\, d\vec{s} \approx 2\pi \int_0^r B_z r\, dr \approx 2\pi\, B_z \frac{r^2}{2} = \pi\, B_z r^2. \qquad (6.6)$$

Откуда получим выражение для вектор-потенциала соленоида и для составляющих магнитного поля соленоида

$$A \approx \frac{B\, r}{2},$$

$$B_\theta = 0,$$

$$B_z \equiv B,$$

$$B_r \approx \frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial z}. \qquad (6.7)$$

А теорема Буша запишется

$$\dot{\theta} = \frac{e}{2m\,\gamma}\cdot\frac{\Psi_0 - \Psi}{\pi\, r^2} = \frac{e}{2\,m\,\gamma}\cdot\left(\frac{\Psi_0}{\pi\, r^2} - B\right). \qquad (6.8)$$

Центробежная сила инерции равна

$$F_{rC} = m\gamma\, r\,\dot{\theta}^{\,2} = \frac{r\,e^2}{4m\gamma}\left(\frac{\Psi_0}{\pi\, r^2} - B\right)^2 . \qquad (6.9)$$

Радиальная сила внешнего постоянного фокусирующего поля в параксиальном приближении

$$F_{rF} = ev_\theta B_z = er\dot{\theta}\, B \approx \frac{r\,e^2 B}{2m\gamma}\cdot\left(\frac{\Psi_0}{\pi\, r^2} - B\right). \qquad (6.10)$$

Радиальная составляющая силы Лоренца действующего ускоряющего поля была получена ранее и для синхронной частицы она равна

$$F_{rE} = e\left(E_r - \beta\, c\, B_\theta\right) \approx \frac{erE_0\omega\sin\varphi}{2\beta_\phi c}\left(1 - \beta_\phi\beta\right) \approx \frac{erE_0\omega\sin\varphi_s}{2\beta_s\, c\gamma_s{}^2} . \qquad (6.11)$$

Оценим радиальную составляющую силы поля пространственного заряда F_{rQ}. Рассмотрим равномерно заряженный непрерывный пучок с током $I = \pi\, r_0^2\, \rho\, \beta\, c$, где r_0 - радиус пучка, ρ - плотность частиц в пучке. Перейдем в систему, движущуюся со скоростью пучка $v = c\beta$ вдоль оси z. При таком переходе $\vec{r}\,' = \vec{r}$,

$z' = \gamma\, z$.

Так как полный заряд должен сохраняться, то его плотность станет $\rho' = \rho/\gamma$. В новой системе имеем статический равномерно заряженный бесконечный цилиндр радиуса r'. Для него $\vec{B}' = 0$, $E'_z = E'_\theta = 0$, а для радиальной составляющей имеем

$$\operatorname{div}\vec{E}' = \frac{\rho'}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad \oint_{S'} E'ds = \int_{V'}\frac{\rho' dV'}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad 2\pi\, r'E'_r dz' = \frac{\pi\, r'^2\rho'\, dz'}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow$$

$$E'_r = \frac{r'\rho'}{2\varepsilon_0} = \frac{r'\rho}{2\gamma\,\varepsilon_0} .$$

При переходе обратно в лабораторную систему отсчета получим

$$E_z = E'_z ,$$

$$\vec{E}_\perp = \gamma\,\vec{E}'_\perp ,$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\left[\vec{v}\times\vec{E}\right].$$

Тогда

$$E_r = \frac{I\, r}{2\pi\, r_0^2\varepsilon_0\beta\, c} = \frac{I\, Z_0\, r}{2\pi\, r_0^2\,\beta} , \quad B_\theta = \frac{\beta}{c}\cdot E_r , \qquad (6.12)$$

где $Z_0 = 120\pi$ Ом – сопротивление свободного пространства.

Радиальная составляющая силы поля пространственного заряда

$$F_{rQ} = e\left(E_r - \beta\, c\, B_\theta\right) = eE_r\left(1-\beta^2\right) = \frac{e\, I\, Z_0\, r}{2\pi\, r_0^2\, \beta\, \gamma^2}\,. \qquad (6.13)$$

Последняя формула записана для непрерывного электронного пучка. Для пучка, состоящего из сгустков длины 2ϕ, следует вместо тока I записать ток $I_\phi = I\cdot\pi/\phi$. Окончательно для F_{rQ} будем иметь

$$F_{rQ} = \frac{e\, I\, Z_0\, r}{2\pi\, r_0^2\, \beta\, \gamma^2}\cdot\frac{\pi}{\phi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e\, I\, Z_0\, r}{r_0^2\, \beta\, \gamma^2 \phi}\,. \qquad (6.14)$$

Отметим, что в приближении равномерно заряженного эллипсоида вращения радиальная составляющая силы поля пространственного заряда запишется в виде

$$F_{rQ} = \frac{3\left(1-k'\right)}{4}\cdot\frac{e\, I\, Z_0\, r}{r_0^2\, \beta\, \gamma^2 \phi}\,. \qquad (6.15)$$

То есть с точностью до численного коэффициента выражения совпадают (при $\gamma >> 1$ $k' \to 0$).

Уравнение радиального движения после подстановки всех учитываемых радиальных сил примет вид

$$\frac{1}{m\gamma}\cdot\frac{d}{dt}\left(m\gamma\,\dot{r}\right) + p^2\, r = \frac{e^2}{4\pi^2 m^2 \gamma^2}\cdot\frac{\Psi_0^2}{r^3}\,, \qquad (6.16)$$

где $p^2 = \dfrac{e^2 B^2}{4m^2\gamma^2} - \dfrac{eE_0\omega\sin\varphi_s}{2m\, c\beta\, \gamma^3} - \dfrac{e\, I\, Z_0}{2mr_0^2\, \beta\, \gamma^3 \phi}$.

Различают два основных типа источников заряженных частиц по отношению к магнитному полю фокусирующего соленоида. Источник первого типа – экранированный катод. В нем вылетающие частицы экранированы от магнитного поля и $\Psi_0 = 0$. Нелинейное уравнение поперечного движения переходит в линейное:

$$\frac{1}{m\gamma}\cdot\frac{d}{dt}\left(\gamma\,\dot{r}\right) + p^2\, r = 0\,. \qquad (6.17)$$

Второй тип источника – иммерсионный источник (от английского immerse – погружать). Вылетающие частицы в нем рождаются в поле соленоида. Для него $\Psi_0 \neq 0$, но решения получаемого нелинейного уравнения можно выразить через решения более простого, линейного уравнения в виде $r = \sqrt{r_I^2 + r_{II}^2}$, где r_I и r_{II} - частные решения линейного уравнения, соот-

ветствующие начальным условиям:

$$r_I(0) = r_0\,, \quad \dot{r}_I(0) = \dot{r}_0\,,$$

$$r_{II}(0) = 0\,, \quad \dot{r}_{II}(0) = \frac{e\,\Psi_0}{2\pi\, m\,\gamma_0} \cdot \frac{1}{r_0}\,.$$

Определитель Вронского для линейного уравнения сохраняется и имеет вид

$$m\gamma\left(r_I\,\dot{r}_{II} - \dot{r}_I\,r_{II}\right) = m\gamma_0\left[r_I(0)\dot{r}_{II}(0) - \dot{r}_I(0)r_{II}(0)\right] = \frac{e\Psi_0}{2\pi}\,.$$

Учитывая это, с помощью подстановки видно, что решение $r = \sqrt{r_I^2 + r_{II}^2}$ удовлетворяет нелинейному уравнению с начальными условиями $r(0) = r_0 \neq 0$, $\dot{r}(0) = \dot{r}_0$. Из вида решения следует, что в случае устойчивости (ограниченности) решений линейного уравнения решения нелинейного уравнения также будут устойчивы, а в случае неустойчивости – неустойчивы. Поэтому вполне достаточно проверить на устойчивость линейное уравнение. Его решения будут устойчивы, если $p^2 > 0$. Отсюда получаем нижний предел величины напряженности фокусирующего магнитного поля при фокусировке продольным магнитным полем

$$B^2 > \frac{4\pi\, mE_0 \sin\varphi_s}{e\,\beta\,\gamma\,\lambda} + \frac{2m\,I\,Z_0}{e\,r_0^2\,\beta\,\gamma\,\phi}\,. \qquad (6.18)$$

Соленоидальную, или, как еще говорят, мягкую фокусировку обычно применяют на небольших участках ускорителя, например, в группирователе электронов. Минимальные значения B_z для протонов оказываются значительно большими, чем для электронов. Поэтому фокусировку продольным магнитным полем тяжелых частиц практически не применяют. Постоянные магнитные поля, необходимые для фокусировки протонов, составляют порядка 5-10 Тл (50-100 кГс). Такие поля можно получить только в сверхпроводящих соленоидах, которые трудно разместить внутри трубок дрейфа. Помещение же всего резонатора, имеющего диаметр порядка рабочей длины волны более метра, внутри сверхпроводящего соленоида практически исключено. Хотя в последнее время были проведены запуски протонного ускорителя, работающие на длине около 20 см, фокусировка в котором осуществлялась внешним сверхпроводящим соленоидом с $B \approx 8$ Тл.

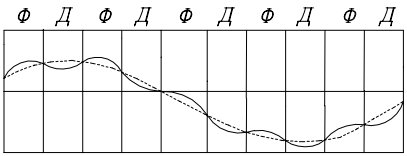
Глава 7

КВАДРУПОЛЬНАЯ ФОКУСИРОВКА

В 1952 году Блюэтт предложил использовать для фокусировки в линейных ускорителях не продольные соленоидальные поля, а квадрупольные поперечные магнитные поля. При фокусировке частиц высокой энергии продольным магнитным полем основное движение направлено параллельно магнитным силовым линиям, так что возникающие силы пропорциональны малым поперечным компонентам скорости. Более эффективным было бы магнитное поле, направленное перпендикулярно движению. Тогда фокусирующие силы оказались бы пропорциональны продольной скорости частиц. Однако в пространстве, свободном от зарядов и токов, невозможно сформировать поля, которые создавали бы радиальные силы, направленные к оси одновременно под всеми углами. В частности, электрические и магнитные поля с квадрупольной симметрией, создающие направленные к оси (фокусирующие) силы в плоскости x, одновременно создают дефокусирующие силы в плоскости y. Однако если разместить вдоль оси квадрупольные линзы так, чтобы смежные линзы были повернуты относительно друг друга на 90°, то в каждой из плоскостей будут попеременно создаваться фокусирующие и дефокусирующие участки. При выполнении определенных условий такая система линз в целом оказывается фокусирующей в обеих плоскостях. Действительно, на частицу, движущуюся по оси, силы не действуют. Чем дальше от оси частица, тем больше действующие силы. Пусть частица попадает сначала на фокусирующий в выбранной плоскости участок. На этом участке траектория частицы изгибается по направлению к оси, и частица пройдет дефокусирующий участок при меньшем отклонении от оси, чем на первом участке. Поэтому в среднем для пары фокусирующей и дефокусирующей линз фокусирующие силы оказываются больше, чем дефокусирующие. Подобный эффект возникает и в том случае, если вначале расположен дефокусирующий участок: дефокусирующая линза переводит частицы на больший радиус, и в фокусирующем участке частица испытывает большее фокусирующее воздействие. В этом и заключается идея квадрупольной, или жесткой (в отличие от соленоидальной, мягкой), или знакопеременной фокусировки. Видно, что при жесткой фокусировке принципиальное значение имеет наличие градиента поля. Если градиенты поля в квадрупольных линзах слишком велики, то уже после фокусирующего участка частица может пересечь ось, тогда дефокусирующий участок отклонит траекторию в другом направлении от оси и пара линз окажется рассеивающей.

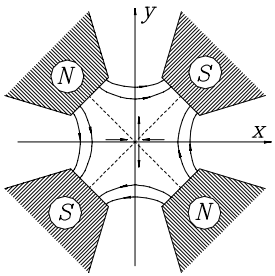
Жесткофокусирующий канал состоит из большого числа последовательно чередующихся фокусирующих и дефокусирующих участков. В таком кана-

ле проявляется явно выраженная периодичность структуры. Наименьшая длина повторения структуры называется периодом фокусирующего поля *S*. На рисунке показана примерная траектория частицы в жесткофокусирующем канале. Видно, что траектория модулирована с периодом фокусирующего поля. На всех фокусирующих участках частица в среднем удалена от оси больше, чем на смежных дефокусирующих. Вообще условия устойчивости в длинных каналах отличаются от условий, при которых комбинация квадрупольных линз Ф и Д, составляющих один период, является собирающей. Период фокусирующего поля может состоять из различных комбинаций Ф- и Д- квадруполей.



Квадрупольные линзы

Рассмотрим квадрупольную магнитную линзу (см. рисунок). Для начала предположим линзу бесконечно длинной так, что $B_z = 0$, то есть сведем задачу к плоской. Поле в апертуре линзы удовлетворяет статическим уравнениям



$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = 0\,; \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0\,.$$

Введем потенциал статического магнитного поля

$$\vec{B} = \mathrm{grad}\,U_\phi\,.$$

Потенциал U_ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в цилиндрических координатах записывается как

$$\frac{\partial^2 U_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U_\phi}{\partial \varphi^2} = 0\,.$$

Общее решение этого уравнения

$$U_\phi(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi).$$

Учитывая квадрупольную симметрию задачи

$$U_\phi(r,0) = U_\phi\left(r,\frac{\pi}{2}\right) = 0\,,$$

$$U_\phi(r,\varphi) = U_\phi\left(r,\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

получим выражение для потенциала квадрупольной линзы:

$$U_{\phi}(r,\varphi) = a_2 r^2 \sin 2\varphi + a_6 r^6 \sin 6\varphi + a_{10} r^{10} \sin 10\varphi + ...$$

Поскольку $x = r\cos\varphi$, а $y = r\sin\varphi$, то

$$U_{\phi}(x,y) = 2a_2 xy + 2a_6\left(3x^4 - 10x^2y^2 + 3y^4\right)xy + ...$$

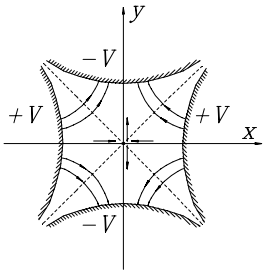
Линза называется идеальной, если градиент поля постоянен в сечении апертуры. Из выражения для потенциала видно, что если полюса линзы ограничены гиперболами, на поверхности которых $xy = const$, то при условии $a_6 = a_{10} = ... = 0$ на поверхности полюсов будет $U_{\phi} = const$ в сечении апертуры. То есть для идеальной линзы имеем

$$U_{\phi} = Gxy\ ; \qquad G = const\ ;$$

$$B_x = \frac{\partial U_{\phi}}{\partial x} = Gy\ ;\ B_y = \frac{\partial U_{\phi}}{\partial y} = Gx\ ,$$

где $G = \left|\text{grad}\, B_x\right| = \left|\text{grad}\, B_y\right|$ - градиент поля.

В электростатической линзе (см. рисунок) медианные оси повернуты относительно магнитной линзы на 45°. В выражениях для потенциала синус двойного угла переходит в косинус, и для идеальной электростатической линзы имеем



$$U_{\phi} = \frac{1}{2}G\cdot\left(x^2 - y^2\right),$$

$$E_x = Gx\ ;\ E_y = -Gy\ , \quad G = \frac{2V}{a^2}\ ,$$

где a – радиус апертуры линзы (расстояние от оси до электродов).

В коротких линзах происходит провисание поля за край линзы, и градиент начинает зависеть от продольной координаты. Потенциал короткой линзы должен удовлетворять полному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U_{\phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_{\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U_{\phi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U_{\phi}}{\partial z^2} = 0\ ,$$

которое можно решить методом разделения переменных. Приближенное выражение для поля короткой линзы в пренебрежении нелинейными членами

$$B_x(x,y,z) \approx G(z)\cdot y\ ,$$
$$B_y(x,y,z) \approx G(z)\cdot x\ .$$

Если длина полюсов в несколько раз превышает радиус апертуры, то наиболее простая аппроксимация поля короткой линзы – аппроксимация

“квадратной волной”: $G(z) = const$ на длине линзы и $G(z) = 0$ вне линзы. Эта аппроксимация может быть уточнена, если ввести эквивалентную длину линзы с постоянным градиентом и подобрать ее длину и градиент так, чтобы действие этой линзы было в некотором смысле эквивалентно действию реальной линзы.

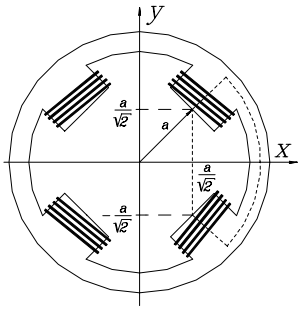
Ампер-витки, необходимые для создания поля с заданным градиентом в магнитной линзе, можно найти, исходя из интегрального уравнения Максвелла:

$$\int_{\Gamma} \vec{H}\, d\vec{l} = \int_{S} \vec{j}\, d\vec{s}\,.$$

Удобный путь интегрирования показан на рисунке пунктиром. При вычислении интеграла в правой части пренебрежем напряженностью магнитного поля внутри сердечника. При расстоянии от оси до полюса равном *a,* интеграл в левой части есть

$$\oint_{\Gamma} \vec{H}\, d\vec{l} = \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} H_y dy = \frac{1}{\mu_0} \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} Gx\, dy = \frac{Ga}{\mu_0 \sqrt{2}} \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} dy = \frac{Ga^2}{\mu_0}\,,$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м – магнитная проницаемость вакуума.



Интеграл в правой части

$$\int_{S} \vec{j}\, d\vec{s} = 2N\,I\,,$$

где $N\,I$ - число ампер-витков, приходящихся на один полюс. Приравнивая оба интеграла, получим

$$N\,I = \frac{5}{4\pi} \cdot 10^{6} \cdot Ga^2\,.$$

Эмпирически было установлено, что для учета стального сердечника число ампер-витков надо увеличить на 10 %. Это дает

$$N\,I = 0.44 \cdot 10^{6} \cdot Ga^2\,.$$

Формула написана в системе СИ. Обычно при расчетах принято измерять индукцию в гауссах, а градиент магнитного поля в гауссах на сантиметр (1 Гс/см = 100 Тл/м). Для этих единиц

$$N\,I = 0.44 \cdot Ga^2\,, \quad [I] = \text{А}, \quad [G] = \text{Гс/см}, \quad [a] = \text{см}.$$

Мощность, рассеиваемая в квадрупольной линзе при питании ее обмоток постоянным током,

$$P = I^2 R = \frac{(0{,}44)^2 G^2 a^4}{N^2} \cdot \frac{\rho \cdot 4\,N\,l}{S_{\Pi}} = \frac{(0{,}44)^2 G^2 a^4}{N^2} \cdot \frac{\rho\, l \cdot 4\,N\,l}{(S_0 f / 8N)} =$$

$$= 6{,}2 \cdot \frac{\rho\, l}{S_0 f} G^2 a^4 .$$

Здесь $[P] =$ Вт – мощность рассеяния,

$[\rho] =$ Ом·м – удельное сопротивление обмотки,

$[l] =$ см – средняя длина витка,

$[S_0] =$ см^2 – суммарная площадь окон для размещения обмоток (S_{Π} – сечение проводника обмотки),

f – коэффициент заполнения окна, равный отношению полного сечения проводника обмотки к площади окна,

$[G] =$ Гс/см – градиент магнитного поля,

$[a] =$ см – радиус магнитной апертуры.

Отметим, что мощность рассеяния пропорциональна четвертой степени радиуса апертуры.

Уравнения Матье-Хилла

Уравнения поперечного движения частицы в пренебрежении зависимостью от поперечных скоростей

$$\frac{dp_x}{dt} = e\left[E_{\omega x} - \beta\, cB_{\omega y}\right] - e\beta\, cB_{\phi y} ,$$

$$\frac{dp_y}{dt} = e\left[E_{\omega y} + \beta\, cB_{\omega x}\right] + e\beta\, cB_{\phi x} ,$$

где нижний индекс ω обозначает ускоряющие поля, а ϕ – фокусирующие поля квадрупольных линз. Компоненты электромагнитных полей равны:

для ускоряющих полей для фокусирующих полей

$$E_{\omega x} = -\frac{x}{2} \cdot \frac{\partial E_{\omega z}}{\partial z}, \quad E_{\omega y} = -\frac{y}{2} \cdot \frac{\partial E_{\omega z}}{\partial z}, \qquad B_{\phi x} = G(z) \cdot y ,$$

$$B_{\omega x} = -\frac{y}{2c^2} \cdot \frac{\partial E_{\omega z}}{\partial t}, \quad B_{\omega y} = \frac{x}{2c^2} \cdot \frac{\partial E_{\omega z}}{\partial t}, \qquad B_{\phi y} = G(z) \cdot x .$$

Тогда

$$\frac{dp_x}{dt} = -e\beta\, cG(z) \cdot x - \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{\partial E_{\omega z}}{\partial z} + \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\partial E_{\omega z}}{\partial t} \right),$$

$$\frac{dp_y}{dt} = e\beta\, cG(z)\cdot y - \frac{y}{2}\cdot\left(\frac{\partial E_{\omega z}}{\partial z} + \frac{\beta}{c}\cdot\frac{\partial E_{\omega z}}{\partial t}\right).$$

Ускоряющее аксиально-симметричное поле типа ТМ $E_z(z,t) = E_0\cos\varphi$, где $\varphi = \omega\left(\int_0^z \frac{dz}{\beta_\phi c} - t\right)$. Тогда выражение в круглых скобках равно

$$\frac{\partial E_{\omega z}}{\partial z} + \frac{\beta}{c}\cdot\frac{\partial E_{\omega z}}{\partial t} = -\frac{\pi\, eE_0\sin\varphi}{\beta\,\lambda\,\gamma^2}.$$

Как и раньше, пренебрегая изменением энергии медленной функцией времени $\ln(\gamma)$, получим

$$m\gamma\frac{d^2x}{dt^2} = -e\beta\, cG\cdot x + \frac{\pi\, eE_0\sin\varphi}{\beta\,\lambda\,\gamma^2}\cdot x,$$

$$m\gamma\frac{d^2y}{dt^2} = e\beta\, cG\cdot y + \frac{\pi\, eE_0\sin\varphi}{\beta\,\lambda\,\gamma^2}\cdot y.$$

Коэффициенты в уравнениях поперечного движения периодически зависят от времени: коэффициент ускоряющего поля - периодический с периодом ускоряющей структуры, а коэффициент G периодичен с периодом фокусирующего поля S. Обычно период фокусирующего поля содержит целое число периодов ускоряющей структуры. Поэтому в дальнейшем будем считать, что указанное соотношение периодов выполняется. Уравнения поперечного движения сводятся к линейным уравнениям с периодическими коэффициентами. Перейдем к безразмерной переменной τ, нормированной на период фокусирующего поля S:

$$d\tau = (\beta\, c/S)dt.$$

Полученные уравнения поперечного движения перепишутся

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + Q_x(\tau)\cdot x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + Q_y(\tau)\cdot y = 0, \qquad (7.1)$$

где $Q_x(\tau) = Q_\phi(\tau) + Q_\omega(\tau) \equiv \Lambda^2\cdot h(\tau) - A_\varphi\cdot g(\tau)$,

$Q_y(\tau) = -Q_\phi(\tau) + Q_\omega(\tau) \equiv -\Lambda^2\cdot h(\tau) - A_\varphi\cdot g(\tau)$,

здесь $\Lambda^2 = \frac{e\,G\,S^2}{p_s}$ – параметр квадрупольных линз (p_s - импульс синхронной частицы),

$h(\tau)$ – безразмерная периодическая функция, описывающая распределение амплитуды фокусирующего поля вдоль оси ускорителя. Для простоты считается, что $h(\tau)=1$ внутри линзы, фокусирующей в плоскости XZ, $h(\tau)=-1$ внутри дефокусирующей линзы в этой плоскости и $h(\tau)=0$ в промежутках между линзами.

$$A_\varphi = \frac{\pi\, eE_0\, S^2}{mc^2 \lambda\, \beta^3\, \gamma^3} \sin\varphi = 2\left(\frac{\pi\, S}{\beta\, \lambda}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_s}$$ – параметр дефокусировки,

$$\Omega^2 = \omega^2 \frac{eE\lambda}{mc^2} \cdot \frac{\sin\varphi_s}{2\pi\, \beta\, \gamma^3}$$ – частота малых продольных колебаний,

$g(\tau)$ – безразмерная периодическая функция, описывающая распределение амплитуды ускоряющего поля по оси ускорителя.

Линейные уравнения полученного типа называют уравнениями Матье-Хилла. В уравнениях переменные разделены. Будем рассматривать одно из этих уравнений, опустив индексы:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + Q(\tau)\cdot x = 0\,. \tag{7.2}$$

Пусть $Q(\tau)$ пока произвольная функция времени, а $u(\tau)$ и $v(\tau)$ - два линейно независимых решения с начальными условиями $u(0)=1$, $\frac{du}{d\tau}(0)=0$, $v(0)=0$, $\frac{dv}{d\tau}(0)=1$. Тогда решение $x(\tau)$ с начальными условиями $x(0)=x_0$ и $\frac{dx}{d\tau}(0)=x_0'$ можно выразить через $u(\tau)$ и $v(\tau)$:

$$x(\tau) = x_0\, u(\tau) + x_0'\, v(\tau).$$

Вронскиан (детерминант Вронского) пары решений линейного уравнения второго порядка, не содержащих первой производной, есть величина, не зависящая от времени, и для выбранных решений равен

$$W = \begin{pmatrix} u(\tau) & v(\tau) \\ \frac{du}{d\tau}(\tau) & \frac{dv}{d\tau}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0) & v(0) \\ \frac{du}{d\tau}(0) & \frac{dv}{d\tau}(0) \end{pmatrix} = 1 = const\,.$$

Возьмем в качестве фундаментальной пары решений два линейно независимых комплексно-сопряженных решения:

$$\chi_1(\tau) = u(\tau) + iv(\tau) \equiv \chi(\tau),$$

$$\chi_2(\tau) = u(\tau) - iv(\tau) \equiv \chi^*(\tau).$$

Для них вронскиан, а вместе с ним и условие нормировки для комплексно-сопряженных решений равен

$$W = \begin{pmatrix} \chi(\tau) & \chi^*(\tau) \\ \frac{d\chi}{d\tau}(\tau) & \frac{d\chi^*}{d\tau}(\tau) \end{pmatrix} = \chi(\tau)\cdot\frac{d\chi^*}{d\tau}(\tau) - \chi^*(\tau)\cdot\frac{d\chi}{d\tau}(\tau) = -2i\ .$$

Представим комплексно-сопряженную фундаментальную пару решений в экспоненциальной форме

$$\chi(\tau) = \sigma(\tau)e^{i\,\Psi(\tau)},\ \chi*(\tau) = \sigma(\tau)e^{-i\,\Psi(\tau)}.$$

Тогда любое действительное решение уравнения Матье-Хилла принимает вид

$$x(\tau) = a\,\chi(\tau) + a*\chi^*(\tau) = A\sigma(\tau)\cos\left[\Psi(\tau) + \Theta\right],$$

где A, Θ - произвольные, действительные постоянные, зависящие от начальных условий. Подставляя решение в экспоненциальной форме в условие нормировки, получим следующую общую связь между скоростью изменения фазы решения и модулем решения:

$$\frac{d\,\Psi}{d\tau} = \frac{1}{\sigma^2}\ . \tag{7.3}$$

А подстановка в исходное уравнение (7.2) дает уравнение, которому удовлетворяет модуль любого комплексного решения:

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + Q(\tau)\sigma - \frac{1}{\sigma^3} = 0\ . \tag{7.4}$$

Еще раз отметим, что полученные свойства решений относятся к линейным уравнениям второго порядка с коэффициентом, являющимся произвольной функцией времени.

Предположим теперь, что $Q(\tau)$ - периодическая. Пусть $\chi_1(\tau)$ и $\chi_2(\tau)$ - произвольная линейно независимая пара комплексных решений уравнения Матье-Хилла. Так как уравнение (7.2) стало инвариантно относительно преобразования переменной $\tau' = \tau + 1$, то функции $\chi_1(\tau+1)$ и $\chi_2(\tau+1)$ также будут решениями уравнения (7.2). С другой стороны, их можно выразить через линейную комбинацию $\chi_1(\tau)$ и $\chi_2(\tau)$:

$$\chi_1(\tau+1) = a_{11}\chi_1(\tau) + a_{12}\chi_2(\tau),$$
$$\chi_2(\tau+1) = a_{21}\chi_1(\tau) + a_{22}\chi_2(\tau).$$

Образуем некоторое новое комплексное решение уравнения (7.2):

$$\varphi(\tau) = A\chi_1(\tau) + B\chi_2(\tau)\,.$$

Тогда

$$\varphi(\tau+1) = A\chi_1(\tau+1) + B\chi_2(\tau+1) = (Aa_{11} + Ba_{21})\chi_1(\tau) + (Aa_{12} + Ba_{22})\chi_2(\tau)\,.$$

Выберем коэффициенты преобразования A и B так, чтобы удовлетворялось тождество

$$\varphi(\tau+1)=\lambda\,\varphi(\tau), \tag{7.5}$$

где λ - постоянная величина. Условие (7.5) выполняется, если коэффициенты преобразования удовлетворяют уравнениям

$$Aa_{11}+Ba_{21}=\lambda A,$$

$$Aa_{12}+Ba_{22}=\lambda B.$$

Нетривиальное решение системы возможно при

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, λ - корень квадратного уравнения

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0, \tag{7.6}$$

а коэффициенты A и B в зависимости от коней уравнения $\lambda=\lambda_1,\lambda_2$ есть

$$\frac{B_1}{A_1}=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{21}},\ \frac{A_2}{B_2}=\frac{\lambda_2-a_{22}}{a_{12}}. \tag{7.7}$$

Можно показать, что величины a_{ij} не зависят от выбора фундаментальных решений $\chi_1(\tau)$, $\chi_2(\tau)$. Тогда если $W(\tau)$ и $W(\tau+1)$ - вронскианы функций $\chi_1(\tau)$ и $\chi_2(\tau)$, то легко показать

$$W(\tau+1)=|(a)|\cdot W(\tau)=const=W(\tau).$$

Откуда

$$|(a)|\equiv\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1.$$

Сумма диагональных элементов матрицы называется *следом* или *шпуром* данной матрицы. Введем для нее обозначение

$$a_{11}+a_{22}\equiv Sp(a)=2\operatorname{ch} l.$$

Характеристическое уравнение (7.6) упрощается:

$$\lambda^2-2\lambda\operatorname{ch} l+1=0.$$

Его корни имеют вид

$$\lambda=\operatorname{ch} l\pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 l-1}=e^{\pm l}. \tag{7.8}$$

Поэтому параметр l называют характеристическим показателем уравнения Матье-Хилла.

Произведение корней характеристического уравнения $\lambda_1\lambda_2=1$, или

$$\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=\frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, существует единственная пара линейно независимых решений уравнения Матье-Хилла, удовлетворяющая условиям

$$\varphi_1(\tau+1)=\lambda\,\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau+1)=\frac{1}{\lambda}\varphi_2(\tau). \qquad (7.9)$$

Это утверждение называют теоремой Флоке. Фундаментальная пара решений уравнения Матье-Хилла, удовлетворяющая условиям (7.9), называется функциями Флоке. В частности, функции $e^{\pm i\omega\tau}$ представляют собой функции Флоке уравнения гармонического осциллятора. Запишем выражение для модулей функций Флоке:

$$|\varphi_1(\tau+1)|=|\lambda|\cdot|\varphi_1(\tau)|,$$

$$|\varphi_2(\tau+1)|=\frac{1}{|\lambda|}\cdot|\varphi_2(\tau)|.$$

Отсюда сразу видно, что общее решение будет устойчиво, если $|\lambda|=1$. Если же $|\lambda|\neq 1$, то один из модулей линейно независимых решений неограниченно возрастает и общее решение будет неустойчиво.

Если в качестве решений $\chi_1(\tau)$ и $\chi_2(\tau)$ выбрать комплексно-сопряженную пару $\chi_1(\tau)=\chi(\tau)$ и $\chi_2(\tau)=\chi^*(\tau)$, то для них

$$\chi(\tau+1)=a_{11}\chi(\tau)+a_{12}\chi^*(\tau),$$

$$\chi^*(\tau+1)=a_{21}^*\chi(\tau)+a_{11}^*\chi^*(\tau).$$

То есть в этом случае $a_{22}=a_{11}^*$ и $\operatorname{ch} l=\frac{1}{2}\left(a_{11}+a_{11}^*\right)$. Величина $\operatorname{ch} l$, как сумма двух комплексно-сопряженных чисел, – величина действительная. Следовательно, корни характеристического уравнения могут быть только действительными или комплексно-сопряженными. Пусть $l=k+i\,\mu$. Тогда

$$\operatorname{ch}(k+i\mu)=\operatorname{ch} k\cos\mu+i\operatorname{sh} k\sin\mu\ .$$

Поскольку $\operatorname{ch} l$ - величина действительная, то возможны только два случая.

1) $\mu=\pm n\pi$, $l=k\pm i\,n\pi$, где n - любые целые числа. Тогда

$$\lambda_1=(-1)^n e^k,\ \lambda_2=(-1)^n e^{-k}.$$

Общее решение неустойчиво: $|\lambda|\neq 1$. Причем таких областей неустойчивости бесконечное множество. Действительным корням соответствует $|\operatorname{ch} l|>1$ (см. 7.8).

2) $k = 0$, $l = i\mu$. Общее решение устойчиво: $\lambda = e^{\pm i\mu}$, $|\lambda| = 1$. Параметр μ можно представить в виде $\mu = \tilde{\mu} \pm n\pi$, где $0 < \tilde{\mu} < \pi$. Тогда $\lambda_1 = (-1)^n e^{i\tilde{\mu}}$, $\lambda_2 = (-1)^n e^{-i\tilde{\mu}}$. Каждому n соответствует своя область изменения параметров функции $Q(\tau)$, для которых общее решение устойчиво. Условием устойчивости является неравенство

$$|\operatorname{ch} l| = |\cos\mu| < 1. \tag{7.10}$$

При анализе поперечных колебаний основной интерес представляют решения в первой области устойчивости при $n = 0$. В устойчивых областях функции Флоке всегда могут быть выбраны комплексно-сопряженными. В самом деле, пусть $\chi_1 = \chi$, $\chi_2 = \chi^*$. При этом $a_{21} = a_{12}^*$. Используя выражение для коэффициентов A_2 и B_2 (см. 7.7), получим

$$\varphi_1 = A_1\left(\chi + \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}^*}\chi^*\right),$$

$$\varphi_2 = B_2\left(\chi^* + \frac{\lambda_2 - a_{11}^*}{a_{12}}\chi^*\right).$$

В устойчивой области $\lambda_2 = \lambda_1^*$, так что выражения в скобках комплексно-сопряженные. Выбирая $B_2 = A_1^*$, имеем

$$\varphi_1(\tau) = \rho(\tau)e^{i\Phi(\tau)},\ \varphi_2(\tau) = \rho(\tau)e^{-i\Phi(\tau)}. \tag{7.11}$$

В соответствии с теоремой Флоке

$$\rho(\tau+1)e^{i\Phi(\tau+1)} = e^{i\mu}\rho(\tau)e^{i\Phi(\tau)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\rho(\tau+1) = \rho(\tau), \\ &\Phi(\tau+1) = \Phi(\tau) + \mu. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Модуль функции Флоке в устойчивой области – периодическая функция времени с периодом $\Delta\tau = 1$. Фаза функции Флоке на каждом периоде $\Delta\tau = 1$ возрастает на величину μ. Любое действительное решение уравнения Матье-Хилла в устойчивой области может быть выражено через модуль и фазу функций Флоке:

$$x(\tau) = A\,\rho(\tau)\cos[\Phi(\tau) + \Theta]. \tag{7.13}$$

Нормировка для функции Флоке

$$\varphi\frac{d\varphi^*}{d\tau} - \varphi^*\frac{d\varphi}{d\tau} = -2i.$$

Если вычислен модуль функции Флоке, то она будет полностью определена, так как ее фазу можно вычислить в соответствии с (7.3):

$$\Phi(\tau)=\int_0^{\tau}\frac{d\tau'}{\rho^2(\tau')}\ . \qquad (7.14)$$

Выражение (7.13) в нашем случае описывает траекторию индивидуальной частицы в жесткофокусирующем канале. И тогда параметр μ - набег фазы поперечных колебаний на одном периоде фокусирующего поля. Скорость изменения фазы Флоке называется мгновенной частотой поперечных колебаний

$$\omega_r=\frac{d\Phi}{dt}\ .$$

Если $T_\phi=\dfrac{S}{v_s}$ - время пролета частицей одного периода фокусирующего поля, тогда

$$\omega_r=\frac{1}{T_\phi\rho^2}\ . \qquad (7.15)$$

Вводят также понятие средней частоты поперечных колебаний на периоде

$$\Omega_r=\frac{1}{T_\phi}\int_t^{t+T_\phi}\omega_r(t)\,dt\ .$$

Заметим, что при $T_\phi=const$ мгновенная частота оказывается периодической функцией времени, а средняя частота – постоянной величиной.

Согласно выражениям (7.12) и (7.14),

$$\mu=\int_\tau^{\tau+1}\frac{d\tau'}{\rho^2(\tau')}\ .$$

Отсюда

$$\Omega_r=\frac{\mu}{T_\phi}\ .$$

То есть параметр μ можно также определить как среднюю (циклическую) частоту поперечных колебаний в масштабе времени τ .

После *n* периодов будем иметь

$$\rho(\tau_0+n)=\rho(\tau_0),$$
$$\Phi(\tau_0+n)=\Phi(\tau_0)+n\,\mu,$$

где τ_0 - начальный момент времени. Дискретные точки, отстоящие на пе-

риод, будут лежать на синусоиде

$$x(\tau_0 + n) = A\,\rho(\tau_0)\cos\left[\mu\, n + \Phi(\tau_0) + \Theta\right], \qquad (7.16)$$

частота которых равна средней частоте поперечных колебаний μ. Амплитуда синусоиды зависит от избранной начальными условиями фазы периода τ_0. Амплитуда имеет наибольшее значение, если точка τ_0 соответствует максимуму модуля Флоке, и наименьшее значение, если τ_0 отвечает минимуму. Траектория частицы укладывается между этими значениями. Из ранее приведенных качественных соображений о работе квадрупольных линз следует, что максимум модуля Флоке приходится на фокусирующий участок, а минимум – на дефокусирующий.

Пучок частиц в жесткофокусирующем канале

При выборе параметров жесткофокусирующего канала должна быть в первую очередь обеспечена устойчивость траекторий. Поведение пучка в канале зависит от начальных условий на входе. Под начальными условиями при решении задачи поперечной динамики обычно понимают размер и наклон огибающей пучка в каждой из поперечных плоскостей или другие величины, однозначно с ними связанные.

При движении частиц в электромагнитном поле обобщенным импульсом, канонически сопряженным с декартовыми координатами, является переменная

$$\vec{P} = \vec{p} + \vec{A},$$

где $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ - импульс частицы, $\vec{A}$ - векторный потенциал поля: $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$. Если в магнитном поле отсутствует продольная компонента ($B_z = 0$), то $A_x = A_y = 0$, $P_x = p_x$ и $P_y = p_y$. Таким образом, при движении в плоскости XOZ, не зависящем от остальных переменных, и при $B_z = 0$ фазовый объем сохраняется в переменных $x,\ p_x$. Двумерным фазовым объемом пучка называется величина

$$V_{\text{п}} = \frac{1}{\pi\, mc}\int dx\, dp_x\ ,$$

где интеграл берется по всему объему, занятому представляющими точками пучка на плоскости $x,\ p_x$. Часто в качестве меры фазового объема принимается деленная на π площадь, занятая представляющими точками пучка на плоскости $x,\ x' = \dfrac{dx}{dz}$:

$$E = \frac{1}{\pi} \int dx\, dx' .$$

Эта величина называется эмиттансом пучка. Эмиттанс пучка связан с поперечным фазовым объемом соотношением

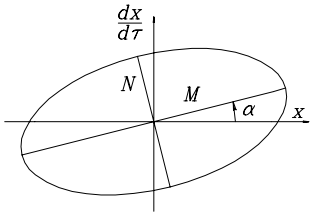
$$E = \frac{V_{\text{п}}}{\beta\, \gamma} . \qquad (7.17)$$

Наклон траектории $-x' \sim p_x / p_z$. Если p_z не зависит от z, то плотность представляющих точек в пространстве $x,\ x'$ в окрестности некоторой заданной области остается постоянной и, следовательно, эмиттанс (или площадь этой окрестности) – инвариант. Если p_z зависит от z, как это и есть при ускорении пучка, то эмиттанс меняется обратно пропорционально p_z. Так как $p_x \sim \beta\, \gamma\, x'$, то удобнее работать с двумерным фазовым объемом пучка $V_{\text{п}}$, являющимся инвариантом движения при изменяющемся p_z. Его иногда называют нормализованным эмиттансом.

Поскольку в уравнениях поперечных колебаний введена безразмерная величина τ, то удобно пользоваться фазовой плоскостью с координатными осями $x,\ \dfrac{dx}{d\tau}$. Производная $\dfrac{dx}{d\tau}$ связана с наклоном траектории соотношением $\dfrac{dx}{d\tau} = S\,\dfrac{dx}{dz}$. Пусть известна проекция поперечного фазового объема пучка на плоскость $x,\ \dfrac{dx}{d\tau}$, и эта проекция ограничена эллипсом

$$ax^2 + b\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + 2cx\frac{dx}{d\tau} = 1 . \qquad (7.18)$$

Площадь, занятая проекцией фазового объема, равна $\pi\, F_0$, где $F_0 = MN$ – приведенный объем пучка, – есть произведение полуосей эллипса (см. рисунок). Если E – эмиттанс пучка, то $F_0 = S\,E$. Связь между поперечным фазовым объемом и приведенным есть



$$V_{\text{п}} = \beta\, \gamma\, E = \frac{\beta\, \gamma\, F_0}{S} = \frac{\beta\, c\, \gamma\, F_0}{c\, S} = \frac{\gamma\, F_0}{c\left(S / \beta\, c\right)} = \frac{\gamma\, F_0}{c\, T_{\phi}} .$$

Можно показать, что приведенный объем связан с коэффициентами уравнения равенством

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} .$$

Индивидуальная траектория частицы, выраженная через модуль и фазу произвольной пары комплексно-сопряженных фундаментальных решений,

$$x = A\sigma \cos(\Psi + \Theta), \tag{7.19}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = A\frac{d\sigma}{d\tau}\cos(\Psi + \Theta) - \frac{A}{\sigma}\sin(\Psi + \Theta). \tag{7.20}$$

Выражения (7.19, 7.20) представляют собой уравнение фазовой траектории частицы в параметрической форме. Величины A и Θ зависят только от начальных условий и являются интегралами движения. Исключая из (7.19, 7.20) тригонометрические функции, получим для интеграла движения A^2

$$A^2 = \left(\sigma\frac{dx}{d\tau} - \frac{d\sigma}{d\tau}x\right)^2 + \left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 . \tag{7.21}$$

Каждому значению интеграла движения A^2 в текущий момент времени τ на плоскости x, $\frac{dx}{d\tau}$ соответствует некоторый эллипс. Выберем начальные условия для модуля $\sigma(0)$, $\frac{d\sigma}{d\tau}(0)$ и величину постоянной A таким образом, чтобы эллипс (7.21) совпал в начальный момент времени с границей фазового объема (7.18):

$$\frac{1}{A^2}\left[\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{\sigma^2}\right] = a ,$$

$$\frac{\sigma^2}{A^2} = b ,$$

$$-\frac{1}{A^2}\sigma\frac{d\sigma}{d\tau} = c . \tag{7.22}$$

Тогда всем частицам, лежащим на границе фазового объема, будет соответствовать одно и то же значение интеграла движения A, и в любой следующий момент времени эллипс (7.21) будет совпадать с границей фазового объема. Подставив выражения (7.22) в равенство (7.19), получим

$$A = \sqrt{F_0} , \tag{7.23}$$

откуда

$$\sigma(0)=\sqrt{bF_0}\,,\quad \frac{d\sigma}{d\tau}(0)=-\frac{cF_0}{\sigma(0)}. \tag{7.24}$$

Выражения (7.24) можно представить в другом виде, если заменить коэффициенты уравнения (7.18) полуосями M, N и углом наклона граничного эллипса α (см. рисунок):

$$\sigma(0)=\sqrt{\frac{M}{N}\cos^2\alpha+\frac{N}{M}\sin^2\alpha}\,,$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau}(0)=\frac{1}{2\sigma(0)}\left(\frac{M}{N}-\frac{N}{M}\right)\sin 2\alpha\,. \tag{7.25}$$

На огибающей пучка лежат частицы, имеющие в данный момент максимальное смещение от оси. Так как эллипс при выполнении условий (7.23) и (7.24) всегда совпадает с границей фазового объема всего пучка, то любому значению фазы Θ соответствует представляющая точка какой-либо частицы пучка, лежащей на границе. Для данного момента времени всегда найдется частица с фазой Θ, при которой $\cos(\Psi+\Theta)=1$. Отсюда согласно выражениям (7.19, 7.20) и (7.23) следует, что огибающая пучка имеет вид

$$r(\tau)=\sqrt{F_0}\,\sigma(\tau). \tag{7.26}$$

Итак, огибающая пучка в каждой из поперечных плоскостей пропорциональна модулю некоторого комплексного решения линейных уравнений движения. Соответствующий модуль представляет собой решение уравнения (7.4) при начальных условиях (7.24), определяемых формой и расположением эллипса, ограничивающего проекцию фазового объема. Подставляя выражения (7.26) в формулы (7.4) и (7.25), получаем уравнение и начальные условия для огибающей:

$$\frac{d^2r_x}{d\tau^2}+Q_x(\tau)r_x-\frac{F_{0x}^2}{r_x^3}=0\,, \tag{7.27}$$

$$r_x(0)=\sqrt{M_x^2\cos^2\alpha_x+N_x^2\sin^2\alpha_x}\,,$$

$$\frac{dr_x}{d\tau}(0)=\frac{1}{2r_x(0)}\left(M_x^2-N_x^2\right)\sin 2\alpha_x\,.$$

Для плоскости YOZ имеют место такие же уравнения с заменой индекса.

При выводе уравнения (7.27) нигде не использовалось предположение о периодичности функций $Q_x(\tau)$ и $Q_y(\tau)$. Предположим, что фазовый объем пучка предшествующей оптикой преобразован ко входу в канал таким образом, чтобы начальные условия (7.25) отвечали периодическому реше-

нию уравнения для модуля (7.4). Тогда огибающая пучка (7.26) будет пропорциональна модулю функции Флоке

$$r(\tau) = \sqrt{F_0}\,\rho(\tau). \qquad (7.28)$$

Огибающие пучка в каждой из поперечных плоскостей оказываются периодическими функциями с периодом, равным периоду фокусирующего поля. Такой пучок называют согласованным с каналом. Эллипсы, ограничивающие проекции фазового объема согласованного канала, называются эллипсами Флоке. Коэффициенты уравнения (7.18), определяющие эллипс Флоке, – периодические функции времени:

$$a = \frac{1}{F_0}\left[\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\right],$$

$$b = \frac{\rho^2}{F_0},$$

$$c = -\frac{1}{F_0}\,\rho\,\frac{d\rho}{d\tau}.$$

Каждой фазе периода фокусирующего поля $0 \le \tau_0 \le 1$ соответствует свой эллипс Флоке, однозначно связанный с параметрами фокусирующего канала $\rho(\tau_0)$, $\frac{d\rho}{d\tau}(\tau_0)$. Эллипс Флоке испытывает тождественное преобразование через период фокусирующего поля. В точках, в которых модуль имеет экстремум, производная модуля равна нулю, так что координатные оси фазовой плоскости совпадают с осями эллипса Флоке. Эллипс Флоке в этих точках принимает канонический вид

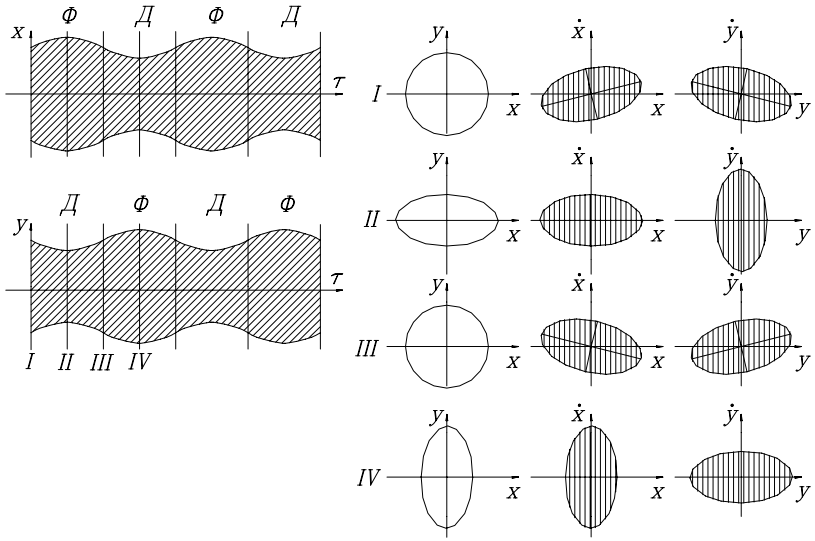
$$x^2 + \left[\rho^2_{\substack{\text{макс}\\ \text{мин}}} \cdot \frac{dx}{d\tau}\right]^2 = x^2_{\substack{\text{макс}\\ \text{мин}}}.$$

В точке максимума модуля Флоке огибающая имеет наибольшую величину, а мгновенная частота поперечных колебаний (7.15) минимальна. На рисунке схематично представлены огибающие согласованного пучка в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, сечения пучка и эллипсы Флоке в некоторых точках периода. В точках II и IV модули функций Флоке имеют экстремум. Подставим в равенство (7.28) мгновенную частоту поперечных колебаний (7.15):

$$r(\tau) = \sqrt{\frac{F_0}{T_\phi \omega_r(\tau)}}.$$

Можно выразить фазовый объем пучка через мгновенную частоту и полу-

ось сечения $V_{\text{п}} = \frac{1}{c}\gamma\,\omega_r r^2$.



Пропускной способностью канала называется максимально возможный фазовый объем согласованного пучка, пропускаемый каналом. Пусть a – радиус той части апертуры, которая отводится под свободные колебания частиц. Полуось сечения достигает максимального значения $r = r_{max}$ при $\omega_r = \omega_{min}$. Согласованный пучок проходит канал без потерь, если $r_{max} < a$. Отсюда получаем формулу для пропускной способности канала:

$$V_{\text{п}} = \frac{1}{c}\gamma\,\omega_{r\,min}\,a^2 .$$

При заданных апертуре канала и энергии частиц пропускная способность канала тем выше, чем больше минимальное мгновенное значение частоты поперечных колебаний на периоде фокусирующего поля. Пропускную способность канала обычно характеризуют величиной аксептанса, равного максимально допустимому эмиттансу согласованного пучка, пропускаемого каналом. Аксептанс канала связан с пропускной способностью соотношением, аналогичным выражению (7.17):

$$A = \frac{V_{\text{п}}}{\beta\,\gamma} .$$

Воспользовавшись (7.15), представим пропускную способность канала и

аксептанс канала в виде

$$V_{\text{п}} = \frac{\gamma}{cT_{\phi}\rho_{max}^{2}} a^{2},$$

$$A = \frac{1}{\beta\, cT_{\phi}\rho_{max}^{2}} a^{2}.$$

Отсюда следует, что в линейных ускорителях при $T_{\phi} = const$ пропускная способность канала в нерелятивистском приближении инвариантна, а в релятивистском приближении медленно растет пропорционально γ-фактору.

Пусть поперечный фазовый объем пучка на входе жесткофокусирующего канала ограничен эллипсом, не совпадающим с эллипсом Флоке начала канала. Если известны функции Флоке для данного канала, то огибающую несогласованного пучка можно найти без интегрирования уравнения (7.4). Рассмотрим некоторое комплексное решение уравнения движения, модуль которого – искомая функция $\sigma(\tau)$:

$$\chi(\tau) = \sigma\, e^{i\varphi} = c_1\varphi(\tau) + c_2\varphi*(\tau), \tag{7.29}$$

где c_1, c_2 - комплексные постоянные:

$$c_1 = C_1 e^{i\gamma_1}, \quad c_2 = C_2 e^{i\gamma_2}. \tag{7.30}$$

Поскольку функция $\chi(\tau)$ определена с точностью до постоянной фазы, можем положить $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = 0$. Модули C_1 и C_2 связаны соотношением, вытекающим из условия одинаковой нормировки всех комплексно-сопряженных решений уравнения движения. Так как

$$\begin{vmatrix} \chi & \chi^{*} \\ \dfrac{d\chi}{d\tau} & \dfrac{d\chi^{*}}{d\tau} \end{vmatrix} = \left(c_1 c_1^{*} - c_2 c_2^{*}\right) \begin{vmatrix} \varphi & \varphi^{*} \\ \dfrac{d\varphi}{d\tau} & \dfrac{d\varphi^{*}}{d\tau} \end{vmatrix},$$

то

$$C_1^2 - C_2^2 = 1. \tag{7.31}$$

Далее, подставляя формулы (7.29), (7.30) в выражение для модуля

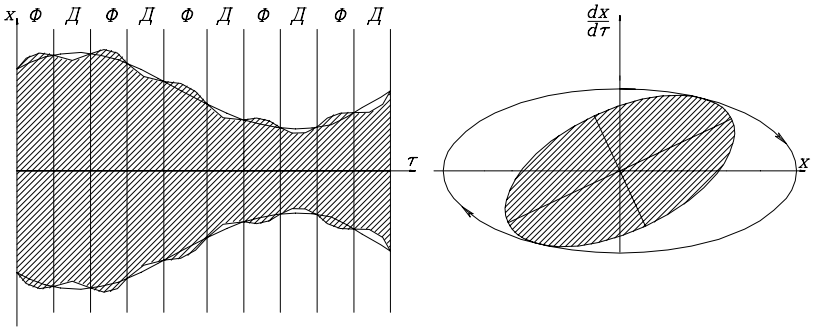
$$\sigma^2 = \chi\chi^{*},$$

получаем

$$\sigma(\tau) = \rho(\tau)\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos\left[2\Phi(\tau) + \gamma\right]}. \tag{7.32}$$

Таким образом, огибающая несогласованного пучка представляет собой произведение периодических процессов с двумя частотами: с частотой повторения фокусирующей структуры и с удвоенной частотой поперечных

колебаний $2\omega_r$, или в среднем за период фокусирующего поля $\frac{2\mu}{T_ф}$. Если отношение этих частот велико, то огибающая несогласованного пучка имеет максимумы в каждом периоде структуры (см. рисунок).



Эти максимумы называются локальными максимумами огибающей. В тех точках канала, где

$$\cos(2\Phi + \gamma) = \pm 1, \tag{7.33}$$

имеем

$$\sigma(\tau) = (C_1 \pm C_2)\rho(\tau).$$

Так как $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, то $C_1 - C_2 < C_1 + C_2$. Из условия (7.31) следует, что

$$\begin{matrix} C_1 + C_2 > 1, \\ 0 < C_1 - C_2 < 1 \end{matrix}.$$

Практически обе частоты огибающей никогда не находятся в рациональном отношении, поэтому в достаточно длинном канале на точку (7.33) придется максимум модуля Флоке. В такой точке огибающая несогласованного пучка будет наибольшей:

$$\sigma_{макс} = (C_1 + C_2)\rho_{макс}. \tag{7.34}$$

Максимум огибающей (7.64) называется главным максимумом. Локальные максимумы огибающей колеблются, имея период, приблизительно соответствующий удвоенной частоте поперечных колебаний $2\mu / T_ф$. Из равенства (7.34) следует, что главный максимум огибающей несогласованного пучка всегда превышает максимум согласованного пучка при одной и той же величине поперечного фазового объема. Геометрическая интерпретация полученного результата следующая. Поскольку дискретные точки траектории, отстоящие на период фокусирующего поля, лежат на синусоиде (7.16), то фазовые траектории представляющих точек, рассматривае-

мые через период, совпадают с эллипсом Флоке. Опишем эллипс Флоке вокруг фазового объема несогласованного пучка (см. рисунок.). Для определенности рассмотрим дискретные точки, отвечающие максимуму модуля Флоке. Фазовый объем несогласованного пучка будет вращаться внутри описанного эллипса Флоке так, что полуось сечения будет пульсировать с удвоенной частотой вращения. Максимальный размер несогласованного пучка оказывается таким же, как размер согласованного пучка с фазовым объемом, соответствующим площади описанного эллипса Флоке. Площадь описанного эллипса Флоке можно назвать эффективным фазовым объемом пучка.

Определим главный максимум огибающей несогласованного пучка при заданных начальных условиях $\sigma(0)$, $\frac{d\sigma}{d\tau}(0)$ (7.25) и при заданных функциях $\rho(\tau)$, $\frac{d\rho}{d\tau}(\tau)$. Дифференцируя квадрат выражения (7.32) и полагая $\tau = 0$, с учетом выражений (7.31), (7.32) получаем три уравнения для определения трех неизвестных C_1, C_2, γ:

$$2C_1C_2 \sin\gamma = \frac{\sigma}{\rho}\left(\sigma\frac{d\rho}{d\tau} - \rho\frac{d\sigma}{d\tau}\right)_{\tau=0},$$

$$C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos\gamma = \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^2_{\tau=0},$$

$$C_1^2 - C_2^2 = 1. \qquad (7.35)$$

Пусть

$$(C_1 + C_2)^2 = \xi\,. \qquad (7.36)$$

Тогда система уравнений (7.35) сводится к виду

$$\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\sin\gamma = 2\frac{\sigma}{\rho}\left(\sigma\frac{d\rho}{d\tau} - \rho\frac{d\sigma}{d\tau}\right)_{\tau=0},$$

$$\xi - \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\sin^2\frac{\gamma}{2} = \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^2_{\tau=0}. \qquad (7.37)$$

Исключая γ из уравнений (7.37), получаем

$$\xi^2 - C\xi + 1 = 0\,, \qquad (7.38)$$

где

$$C = \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2 + \left(\sigma\frac{d\rho}{d\tau} - \rho\frac{d\sigma}{d\tau}\right)\Bigg|_{\tau=0}. \qquad (7.39)$$

Если пучок согласован с каналом, то $C = 2$ и $\xi_1 = \xi_2 = 1$. При любых других начальных условиях $\xi_1 > 1$, $\xi_2 < 1$. Главный максимум несогласованного пучка

$$r_{\text{мах}} = \sqrt{\xi_1 F_0}\,\rho_{\text{мах}}\,. \tag{7.40}$$

Величина корня $\xi_1 > 1$ или однозначно связанная с ним величина параметра $C > 2$ может служить критерием согласования.

Предположим, что согласованный пучок должен иметь на входе канала кроссовер: $\frac{d\rho}{d\tau}(0) = 0$. Далее предположим, что несогласованный пучок имеет на входе параллельную огибающую, но полуоси сечения отличаются от согласованных. Тогда

$$C = \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^2_{\tau=0} + \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2_{\tau=0}.$$

Из уравнения (7.38) следует

$$\sqrt{\xi} = \begin{cases} \dfrac{\sigma(0)}{\rho(0)} & \text{при } \sigma(0) > \rho(0), \\ \dfrac{\rho(0)}{\sigma(0)} & \text{при } \sigma(0) < \rho(0). \end{cases}$$

Так, например, максимум несогласованного пучка превышает максимум согласованного пучка в два раза, если $\sigma(0) = 2\rho(0)$ или $\sigma(0) = \frac{1}{2}\rho(0)$.

Пусть на входе канала поступает несогласованный пучок, достигающий в нем радиуса a, равного максимально допустимому значению амплитуды свободных колебаний. Тогда, согласно выражениям (7.26), (7.40), наибольший размер согласованного пучка с тем же поперечным фазовым объемом равен

$$r_{\text{макс (согл)}} = \frac{a}{\sqrt{\xi_1}}\,.$$

Отсюда можно найти фазовый объем несогласованного пучка

$$V_{\text{п}} = \frac{1}{c}\gamma\omega_{r\,\text{мин}} a^2 \frac{1}{\xi_1}\,.$$

Наибольший поперечный фазовый объем несогласованного пучка, который может быть пропущен через фокусирующий канал, связан с пропускной способностью канала следующим образом:

$$V_{\text{п макс}} = \frac{V_{\text{к}}}{\xi_1}.$$

Следовательно, лучшая фокусировка пучка в канале достигается в том случае, когда пучок предварительно подготовлен системой согласующих линз. Поскольку величины F_{0x}, F_{0y} при преобразованиях фазового объема остаются постоянными, то задача согласования пучка с каналом сводится к преобразованию четырех параметров пучка σ_x, σ_y, $\frac{d\sigma_x}{d\tau}$, $\frac{d\sigma_y}{d\tau}$ или, что то же самое, M_x, M_y, α_x, α_y. Поэтому минимальное число независимых параметров согласующей цепочки линз в общем случае должно быть равно четырем.

Матричный метод расчета функций Флоке

Рассмотрим произвольное действительное решение уравнения движения, выраженное через функции Флоке:

$$x(\tau) = b_1\varphi_1(\tau) + b_2\varphi_2(\tau),$$

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = b_1\frac{d\varphi_1(\tau)}{d\tau} + b_2\frac{d\varphi_2(\tau)}{d\tau}. \qquad (7.41)$$

В устойчивой области функции Флоке и произвольные постоянные комплексно сопряжены, а в неустойчивой области – действительны. Решение можно представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{d\tau} \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \frac{d\varphi_1}{d\tau} & \frac{d\varphi_2}{d\tau} \end{pmatrix}_\tau \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \qquad (7.42)$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \frac{d\varphi_1}{d\tau} & \frac{d\varphi_2}{d\tau} \end{pmatrix}_\tau^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{d\tau} \end{pmatrix}_\tau.$$

Теперь запишем уравнение (7.41) для момента времени $\tau + 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{d\tau} \end{pmatrix}_{\tau+1} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \frac{d\varphi_1}{d\tau} & \frac{d\varphi_2}{d\tau} \end{pmatrix}_{\tau+1} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \frac{d\varphi_1}{d\tau} & \frac{d\varphi_2}{d\tau} \end{pmatrix}_\tau^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{d\tau} \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{d\tau} \end{pmatrix}_\tau. \qquad (7.43)$$

Пусть $\tau = n + \tau'$, где n – целое число, а τ' - любая фаза периода, лежащая в пределах $0 \le \tau' \le 1$. Так как исходное уравнение Матье-Хилла инвариантно относительно преобразования $\tau = n + \tau'$, то при любом n может быть выбрана одна и та же пара фундаментальных функций. Следовательно, матрица

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \tag{7.44}$$

не зависит от n. Элементы матрицы (7.44) – функции выбранной фазы периода τ'. Матрица (7.44) называется матрицей периода фокусирующего поля, начинающегося от избранной фазы τ'. Детерминант матрицы в правой части уравнения (7.42) – вронскиан функций Флоке:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}_\tau = W(\tau).$$

Для обратной матрицы имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}_\tau^{-1} = \frac{1}{W(\tau)}.$$

Тогда по теореме о постоянстве вронскиана детерминант матрицы T

$$|T| = \frac{W(\tau+1)}{W(\tau)} = 1,$$

или

$$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1. \tag{7.45}$$

Можно показать, что элементы матрицы периода и в устойчивой, и в неустойчивой областях – действительные числа. Развернем произведение матриц (7.43). Используя теорему Флоке (7.8, 7.9), получаем

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{W}\left(e^{l}\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{d\tau} - e^{-l}\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{d\tau}\right), \\ T_{12} &= -\frac{2}{W}\varphi_1\varphi_2 \operatorname{sh} l, \\ T_{21} &= \frac{2}{W}\cdot\frac{d\varphi_1}{d\tau}\cdot\frac{d\varphi_2}{d\tau}\cdot \operatorname{sh} l, \\ T_{22} &= \frac{1}{W}\left(e^{-l}\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{d\tau} - e^{l}\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{d\tau}\right). \end{aligned} \tag{7.46}$$

Из равенств (7.46) следует, что сумма элементов главной диагонали равна

$$T_{11} + T_{22} = 2 \operatorname{ch} l. \tag{7.47}$$

Отсюда

$$\operatorname{ch} l = \frac{1}{2} Sp\, T.$$

Устойчивость траектории обеспечивается при выполнении условия

$$Sp\,T < 2\,.$$

В области устойчивых решений $l = i\mu$ и равенство (7.47) имеет вид

$$\cos\mu = \frac{\mathrm{T}_{11} + T_{22}}{2}\,, \tag{7.48}$$

где μ - набег фазы Флоке на одном периоде фокусирующего поля.

Ввиду того, что матрицы периода связаны условием (7.45), только три элемента могут быть определены независимо. Введем три независимые величины, определяющие матрицу периода следующим образом:

$$\cos\mu = \frac{\mathrm{T}_{11} + T_{22}}{2}\,,$$

$$\nu = \sqrt{-\frac{T_{21}}{T_{12}}}\,,$$

$$\sin\varepsilon = \frac{T_{11} - T_{22}}{2\sqrt{-T_{12}T_{21}}}\,. \tag{7.49}$$

В области устойчивых решений параметры ν и ε действительные. Из уравнений (7.49) могут быть получены выражения для элементов матрицы периода через введенные независимые параметры

$$T_{11} = \frac{\cos(\mu - \varepsilon)}{\cos\varepsilon}\,,\ T_{12} = \frac{\sin\mu}{\nu\cos\varepsilon}\,,$$

$$T_{21} = -\frac{\nu\sin\mu}{\cos\varepsilon}\,,\quad T_{22} = \frac{\cos(\mu + \varepsilon)}{\cos\varepsilon}\,.$$

Свяжем параметры матрицы $\nu\,,\varepsilon$ с модулем функции Флоке канала. Подставляя выражения (7.46) в правые части формул (7.49) и учитывая обозначения для функций Флоке в устойчивой области (7.11), получаем

$$\nu = \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\right]^{1/2}\,,$$

$$\sin\varepsilon = -\frac{d\rho}{d\tau}\cdot\left[\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\right]^{-1/2}\,. \tag{7.50}$$

Из трех независимых параметров матрицы T один параметр – величина постоянная: $\mu = const$, а две другие $-\nu(\tau),\ \varepsilon(\tau)$ - периодические функции независимой переменной с периодом $\Delta\tau = 1$. Параметр ε равен нулю в точках экстремума модуля Флоке. В точках экстремума матрица периода упрощается:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\mu & \frac{1}{\nu}\sin\mu \\ -\nu\sin\mu & \cos\mu \end{pmatrix}.$$

Так как в этих точках $\nu_{\substack{\text{макс}\\ \text{мин}}} = 1/\rho^2_{\substack{\text{мин}\\ \text{макс}}}$, то эллипс Флоке принимает вид

$$x^2 + \left[\frac{dx}{d\tau}/\nu_{\substack{\text{макс}\\ \text{мин}}}\right]^2 = x^2_{\substack{\text{мин}\\ \text{макс}}}.$$

Согласно выражению (7.50),

$$\operatorname{tg}\varepsilon = -\rho\frac{d\rho}{d\tau},$$

$$\nu\cos\varepsilon = \frac{1}{\rho^2}.$$

Отсюда, учитывая выражение (7.14), имеем

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \nu\cos\varepsilon.$$

Произведение $\nu\cos\varepsilon$ - мгновенная частота поперечных колебаний в масштабе τ. В масштабе времени t

$$\omega_r = \frac{\nu\cos\varepsilon}{T_\phi}. \qquad (7.51)$$

Пропускная способность канала определяется минимальным значением мгновенной частоты (7.51). В точке, где частота (7.51) достигает минимального значения, $\varepsilon = 0$ и

$$\omega_{r\,\text{мин}} = \frac{\nu_\phi}{T_\phi}.$$

Здесь ν_ϕ - величина параметра ν в середине фокусирующего промежутка при

$$\varepsilon = 0 \ \left(T_{11} = T_{22}\right).$$

Если матрица периода вычислена, то, значит, известны модуль Флоке и его производная в соответствующей точке канала:

$$\rho(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\nu\cos\varepsilon}},$$

$$\frac{d\rho}{d\tau}(\tau) = -\frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\rho(\tau)}.$$

Задача определения матрицы периода фокусирующего поля упрощается,

если поля квадрупольных линз и ускоряющие поля аппроксимируются “квадратной волной”. Предположим, что на длине L некоторого промежутка параметр квадрупольной линзы Λ^2 и параметр дефокусировки A_ϕ ускоряющего поля постоянны. Тогда вместо уравнения (7.2) с периодическими коэффициентами на этом промежутке будем иметь уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + Qx = 0\,,$$

где $Q_{1,2} = \pm\Lambda^2 - A_\phi = const$. При $Q = Q_1 \equiv +\Lambda^2 - A_\phi$ промежуток фокусирующий, а при $Q = Q_2 \equiv -\Lambda^2 - A_\phi$ - дефокусирующий. Уравнение движения на рассматриваемом участке имеет решение

$$x(\tau) = A\cos\sqrt{Q}\tau + B\sin\sqrt{Q}\tau,$$

$$\frac{dx}{d\tau}(\tau) = \dot{x}(\tau) = -A\sqrt{Q}\cdot\sin\sqrt{Q}\tau + B\cdot\cos\sqrt{Q}\tau,$$

где A и B – произвольные постоянные, которые определяются начальными условиями на входе:

$$A = x(0) = x_0\,,$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{Q}}\dot{x}(0) = \frac{1}{\sqrt{Q}}\dot{x}_0\,.$$

На выходе промежутка имеем

$$x_1 = x_0\cos\sqrt{Q}\tau_1 + \dot{x}_0\frac{1}{\sqrt{Q}}\sin\sqrt{Q}\tau_1\,,$$

$$\dot{x}_1 = -x_0\sqrt{Q}\cdot\sin\sqrt{Q}\tau_1 + \dot{x}_0\cdot\cos\sqrt{Q}\tau_1\,,$$

где $\tau_1 = L/S$ - длина промежутка в долях периода фокусировки.

Матрица преобразования

$$\begin{pmatrix} \cos\dfrac{L\sqrt{Q}}{S} & \dfrac{1}{\sqrt{Q}}\sin\dfrac{L\sqrt{Q}}{S} \\ -\sqrt{Q}\sin\dfrac{L\sqrt{Q}}{S} & \cos\dfrac{L\sqrt{Q}}{S} \end{pmatrix}. \qquad (7.52)$$

Предположим, что на длине участка, занятого квадрупольной линзой длиной D, нет ускоряющего поля ($A_\phi = 0$). Тогда

$$Q = \pm\Lambda^2 \equiv S^2\frac{e\cdot(\pm G)}{p_s}\,.$$

Знак + отвечает фокусирующей линзе (Ф), а знак – - дефокусирующей (Д). Поскольку для дефокусирующей линзы градиент имеет отрицательный знак, то и величину Q в матрице преобразования (7.52) для квадрупольной линзы следует заменить на iQ. Учитывая, что $\cos iQ = \operatorname{ch} Q$, а $\sin iQ = i \operatorname{sh} Q$, запишем матрицы преобразования для фокусирующей и дефокусирующей линз

Фокусирующая линза

$$P = \begin{pmatrix} \cos K & \frac{1}{\Lambda}\sin K \\ -\Lambda \sin K & \cos K \end{pmatrix},$$

Дефокусирующая линза

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} K & \frac{1}{\Lambda}\operatorname{sh} K \\ \Lambda \operatorname{sh} K & \operatorname{ch} K \end{pmatrix}. \qquad (7.53)$$

Величину $K = \frac{D\sqrt{|Q|}}{S} = D\sqrt{\frac{eG}{p}} = \frac{D\Lambda}{S}$ называют *жесткостью линзы*.

Предположим, что фокусирующий канал состоит сплошь из знакопеременных линз (ФД). Из соображений симметрии максимум модуля Флоке приходится в таком канале на середину фокусирующей линзы, а минимум – на середину дефокусирующей. Отметим, что канал ФД лучше начинать с полулинзы, поскольку тогда начальные условия для согласованного пучка упрощаются: согласованный пучок должен иметь на входе в канал кроссовер. Условия согласования будут выполнены, если подобрать соответствующим образом сечение пучка в кроссовере. Начнем период с середины фокусирующей линзы:

$$T = P_{1/2}\overline{P}P_{1/2}. \qquad (7.54)$$

Матрица $P_{1/2}$ соответствует полулинзе и имеет вид

$$P_{1/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{K}{2} & \frac{1}{\Lambda}\sin\frac{K}{2} \\ -\Lambda \sin\frac{K}{2} & \cos\frac{K}{2} \end{pmatrix}.$$

Развернем произведение (7.54)

$$T_{11} = T_{22} = \operatorname{ch} K \cos K,$$

$$T_{12} = \frac{1}{\Lambda}(\operatorname{ch} K \sin K + \operatorname{sh} K),$$

$$T_{21} = -\Lambda(\operatorname{ch} K \sin K - \operatorname{sh} K).$$

Матрица периода в перпендикулярной плоскости

$$\overline{T} = \overline{P}_{1/2}P\overline{P}_{1/2}$$

может быть получена заменой K на величину iK:

$$\overline{T}_{11} = \overline{T}_{22} = \mathrm{ch}\, K \cos K,$$

$$\overline{T}_{12} = \frac{1}{\Lambda}\left(\cos K\, \mathrm{sh}\, K + \sin K\right),$$

$$\overline{T}_{21} = \Lambda\left(\cos K\, \mathrm{sh}\, K - \sin K\right).$$

Независимые параметры матриц определяются формулами (7.49). Для обеих матриц $\varepsilon = 0$. Остальные параметры

$$\cos\mu = \frac{T_{11} + T_{22}}{2} = \frac{\overline{T}_{11} + \overline{T}_{22}}{2} = \mathrm{ch}\, K \cos K\,,$$

$$\nu_{\phi} = \sqrt{-\frac{T_{21}}{T_{12}}} = \Lambda\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\, K \sin K - \mathrm{sh}\, K}{\mathrm{ch}\, K \sin K + \mathrm{sh}\, K}}\,,$$

$$\nu_{Д} = \sqrt{-\frac{\overline{T}_{21}}{\overline{T}_{12}}} = \Lambda\sqrt{\frac{\sin K - \cos K\, \mathrm{sh}\, K}{\sin K + \cos K\, \mathrm{sh}\, K}}\,,$$

где ν_{ϕ} – безразмерная частота в середине фокусирующей линзы, $\nu_{Д}$ – в середине дефокусирующей линзы. Траектории частиц устойчивы при

$$\left|\cos\mu\right| = \left|\mathrm{ch}\, K \cos K\right| < 1\,.$$

Фокусирующий канал может включать в себя холостые промежутки (О), на которых нет ни фокусирующих линз, ни ускоряющих структур. Если длина такого промежутка равна h, то на нем $Q = 0$. Переходя в матрице (7.53) к пределу при $K \to 0$ и полагая $D = h$, получаем

$$H = \begin{pmatrix} 1 & h/S \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если между линзами частицы ускоряются в структуре на бегущей волне длиной l, то на этом участке $Q = -A_{\phi} \equiv -2\left(\frac{\pi\, S}{\beta\, \lambda}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_s}$. Такой случай часто встречается в линейных ускорителях на сверхвысокие энергии. В предположении, что на длине ускоряющего промежутка между смежными линзами можно пренебречь изменением фазы частицы φ, $Q = const$. Ранее было показано, что для обеспечения ускорения и устойчивости продольных колебаний необходимо, чтобы фаза φ находилась в интервале $0 < \varphi < \pi/2$. Тогда $Q < 0$, то есть ускоряющий промежуток в общем случае – дефокусирующий, и его матрица записывается в виде

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\dfrac{l\sqrt{A_\phi}}{S} & \dfrac{1}{\sqrt{A_\phi}}\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{A_\phi}}{S} \\ \sqrt{A_\phi}\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{A_\phi}}{S} & \operatorname{ch}\dfrac{l\sqrt{A_\phi}}{S} \end{pmatrix}. \qquad (7.55)$$

Если же частица движется в такой фазе бегущей волны, при которй параметр дефокусировки отрицателен, то ускоряющее поле становится фокусирующим (в поперечном направлении !), а гиперболические функции в матрице Γ переходят в круговые. Для частиц высокой энергии частота продольных колебаний мала ($\Omega \to 0$), так что параметр дефокусировки существенно меньше единицы. В этом случае матрицу (7.55) можно с достаточной для практических целей точностью записать в виде

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{l}{S} \\ A_\phi \dfrac{l}{S} & 1 \end{pmatrix}.$$

Любая матрица, у которой элементы главной диагонали одинаковы, а детерминант равен единице, может быть представлена в виде произведения трех простых матриц:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Производя умножение и приравнивая соответствующие элементы матриц, получаем

$$a = \frac{T_{11} - 1}{T_{21}}, \quad b = T_{21}.$$

Разложим матрицу (7.55) на такие сомножители:

$$a = \frac{1}{\sqrt{A_\phi}}\operatorname{th}\frac{l\sqrt{A_\phi}}{2S}, \quad b = \sqrt{A_\phi}\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{A_\phi}}{S}.$$

При $A_\phi << 1$ имеем $a = \dfrac{l}{2S}$, $b = A_\phi \dfrac{l}{S}$ или

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & l/2S \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_\phi \dfrac{l}{S} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l/2S \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если $A_\phi << 1$, то действие ускоряющего промежутка сводится к действию двух холостых зазоров длиной $l/2$ и к действию

средней преломляющей плоскости с коэффициентом преломления траектории

$$\frac{\Delta\dot{x}}{x} = A_\phi \frac{l}{S}.$$

Отношение S/l есть число ускоряющих промежутков, приходящихся на один период фокусирующего поля. Обычно отношение S/l – целое число. Если на всем периоде S нет фокусирующих линз, то общий эффект дефокусировки на таком периоде, содержащем $n = S/l$ ускоряющих промежутков, будет характеризоваться матрицей

$$\Gamma_S = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\sqrt{A_\phi}}{n} & \frac{1}{\sqrt{A_\phi}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{A_\phi}}{n} \\ \sqrt{A_\phi}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{A_\phi}}{n} & \operatorname{ch}\frac{\sqrt{A_\phi}}{n} \end{pmatrix}^n.$$

В соответствии с теоремой Сильвестра

$$\Gamma_S = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\sqrt{A_\phi} & \frac{1}{\sqrt{A_\phi}}\operatorname{sh}\sqrt{A_\phi} \\ \sqrt{A_\phi}\operatorname{sh}\sqrt{A_\phi} & \operatorname{ch}\sqrt{A_\phi} \end{pmatrix}.$$

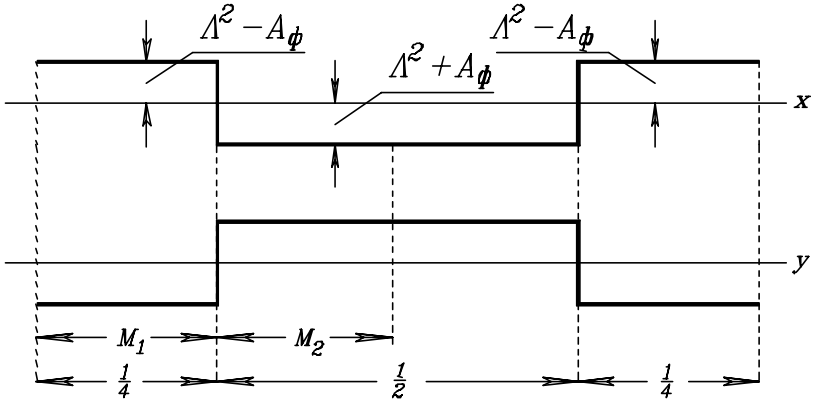
Если параметр дефокусировки мал, то

$$\Gamma_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ A_\phi & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что коэффициент преломления траектории на длине одного периода фокусирующего поля численно равен параметру дефокусировки.

Рассмотрим в качестве примера простейший фокусирующий канал, период которого включает ускоряющую структуру и две квадрупольные линзы – фокусирующую длиной L_1 и дефокусирующую длиной $L_2 = S - L_1$. Для простоты будем считать, что длины линз одинаковы ($L_1 = L_2$), а градиенты фокусирующей и дефокусирующей линз равны по абсолютному значению. Период фокусировки лучше начинать с середины магнитной линзы. Положим $W^2 = Q$. На рисунке показан вид коэффициента W^2 для осей x и y (общая длина периода равна единице). Матрицы половины первого и половины второго полупериодов выражаются в виде

$$M_{1,2} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{W_{1,2}}{4} & \dfrac{1}{W_{1,2}}\sin\dfrac{W_{1,2}}{4} \\ -W_{1,2}\sin\dfrac{W_{1,2}}{4} & \cos\dfrac{W_{1,2}}{4} \end{pmatrix}.$$



Полупериод, начинающийся при $\tau = 0$ (в середине фокусирующего полупериода), имеет матрицу $B = M_2 M_1$, а полупериод с началом при $\tau = 1/2$ - матрицу $\widetilde{B} = M_1 M_2$ (волнистая черта означает перестановку элементов главной диагонали). Матрица полного периода фокусировки

$$T = \widetilde{B} B .$$

Элементы матрицы периода равны

$$T_{11} = T_{22} = B_{11}B_{22} + B_{12}B_{21},$$
$$T_{12} = 2B_{22}B_{12},$$
$$T_{21} = 2B_{11}B_{21}.$$

Или в развернутом виде –

$$T_{11} = T_{22} = \cos\frac{W_1}{2}\cos\frac{W_2}{2} - \frac{W_1^2 + W_2^2}{2W_1W_2}\sin\frac{W_1}{2}\sin\frac{W_2}{2},$$

$$T_{12} = \frac{1}{W_1}\left(\sin\frac{W_1}{2}\cos\frac{W_2}{2} + \frac{W_1^2 + W_2^2}{2W_1W_2}\cos\frac{W_1}{2}\sin\frac{W_2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2W_1W_2}\sin\frac{W_2}{2}\right),$$

$$T_{21} = W_1\left(-\sin\frac{W_1}{2}\cos\frac{W_2}{2} + \frac{W_1^2 + W_2^2}{2W_1W_2}\cos\frac{W_1}{2}\sin\frac{W_2}{2} - \frac{W_1^2 - W_2^2}{2W_1W_2}\sin\frac{W_2}{2}\right).$$

Обозначим $$K_{Ф}^2 = \Lambda^2 - A_{ф},$$
$$K_{Д}^2 = \Lambda^2 + A_{ф}.$$

Для оси x половина первого полупериода, начинающегося при $\tau = 0$, – фокусирующая, а половина второго полупериода с началом при $\tau = 1/2$ – дефокусирующая. Тогда для оси x имеем
$$W_1 = K_{Ф},$$
$$W_2 = i\,K_{Д}.$$

С учетом того, что $\cos iK_{Д} = \mathrm{ch}\,K_{Д}$, $\sin iK_{Д} = i\,\mathrm{sh}\,K_{Д}$, элементы матрицы T для оси x запишутся

$$T_{11} = T_{22} = \cos\mu = \cos\frac{K_{Ф}}{2}\,\mathrm{ch}\frac{K_{Д}}{2} + \frac{K_{Д}^2 - K_{Ф}^2}{2K_{Ф}K_{Д}}\sin\frac{K_{Д}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{K_{Д}}{2},$$

$$T_{12} = \frac{1}{K_{Ф}}\left(\sin\frac{K_{Ф}}{2}\,\mathrm{ch}\frac{K_{Д}}{2} - \frac{K_{Д}^2 - K_{Ф}^2}{2K_{Ф}K_{Д}}\cos\frac{K_{Ф}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{K_{Д}}{2} + \frac{K_{Д}^2 + K_{Ф}^2}{2K_{Ф}K_{Д}}\,\mathrm{sh}\frac{K_{Д}}{2}\right),$$

$$T_{21} = K_{Ф}\left(-\sin\frac{K_{Ф}}{2}\,\mathrm{ch}\frac{K_{Д}}{2} + \frac{K_{Д}^2 - K_{Ф}^2}{2K_{Ф}K_{Д}}\cos\frac{K_{Ф}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{K_{Д}}{2} + \frac{K_{Д}^2 + K_{Ф}^2}{2K_{Ф}K_{Д}}\,\mathrm{sh}\frac{K_{Д}}{2}\right).$$

Отсюда найдем, что $\varepsilon = 0$, а безразмерная частота в середине фокусирующего зазора $\nu = \nu_{ф}$, которая определяет пропускную способность канала, равна

$$\nu_{ф} = \sqrt{-\frac{T_{21}}{T_{12}}} =$$
$$= K_{Ф}^2 \cdot \sqrt{\frac{\sin\frac{K_{Ф}}{2}\,\mathrm{ch}\frac{K_{Д}}{2} - \frac{K_{Д}^2 - K_{Ф}^2}{2K_{Ф}K_{Д}}\cos\frac{K_{Ф}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{K_{Д}}{2} - \frac{K_{Д}^2 + K_{Ф}^2}{2K_{Ф}K_{Д}}\,\mathrm{sh}\frac{K_{Д}}{2}}{\sin\frac{K_{Ф}}{2}\,\mathrm{ch}\frac{K_{Д}}{2} - \frac{K_{Д}^2 - K_{Ф}^2}{2K_{Ф}K_{Д}}\cos\frac{K_{Ф}}{2}\,\mathrm{sh}\frac{K_{Д}}{2} + \frac{K_{Д}^2 + K_{Ф}^2}{2K_{Ф}K_{Д}}\,\mathrm{sh}\frac{K_{Д}}{2}}}.$$

Для оси y половина первого полупериода, начинающегося при $\tau = 0$, – дефокусирующая, а половина второго полупериода с началом при $\tau = 1/2$ – фокусирующая. Тогда для оси y надо положить
$$W_1 = i\,K_{Д},$$
$$W_2 = K_{Ф}.$$

Диагональные элементы матрицы периода $\overline{T}$ для оси y

$$\overline{T}_{11} = \overline{T}_{22} = T_{11} = T_{22} = \cos\mu \ .$$

Параметр $\bar{\varepsilon} = 0$, а безразмерная частота в середине дефокусирующего зазора $\bar{\nu} = \nu_Д$ равна

$$\nu_Д = \sqrt{-\frac{\overline{T}_{21}}{\overline{T}_{12}}} =$$

$$= K_Д^2 \cdot \sqrt{\frac{\dfrac{K_Д^2 + K_Ф^2}{2K_Ф K_Д}\sin\dfrac{K_Ф}{2} - \dfrac{K_Д^2 - K_Ф^2}{2K_Ф K_Д}\sin\dfrac{K_Ф}{2}\operatorname{ch}\dfrac{K_Д}{2} - \cos\dfrac{K_Ф}{2}\operatorname{sh}\dfrac{K_Д}{2}}{\dfrac{K_Д^2 + K_Ф^2}{2K_Ф K_Д}\sin\dfrac{K_Ф}{2} + \dfrac{K_Д^2 - K_Ф^2}{2K_Ф K_Д}\sin\dfrac{K_Ф}{2}\operatorname{ch}\dfrac{K_Д}{2} + \cos\dfrac{K_Ф}{2}\operatorname{sh}\dfrac{K_Д}{2}}} \ .$$

Для выбора режима фокусировки линейного ускорителя удобно использовать диаграмму устойчивости, представляющую собой плоскость $A_ф$, Λ^2, на которую нанесены линии постоянных значений $\cos\mu$ (сплошные линии). В пределах рисунка помещается лишь часть первой области устойчивости, которая всегда и используется при квадрупольной фокусировке. На оси $A_ф$ ($\Lambda^2 = 0$) $\mu = \nu = \sqrt{-A_ф}$. На оси Λ^2 ($A_ф = 0$) для $\cos\mu$ и ν получаем выражения, совпадающие с полученными ранее для ФД-канала с жесткостью линзы $K = \dfrac{D}{S}\cdot\Lambda = \dfrac{\Lambda}{2}$:

$$\cos\mu = \operatorname{ch}\frac{\Lambda}{2}\cos\frac{\Lambda}{2},$$

$$\nu_ф = \Lambda\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\Lambda}{2}\sin\dfrac{\Lambda}{2} - \operatorname{sh}\dfrac{\Lambda}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{\Lambda}{2}\sin\dfrac{\Lambda}{2} + \operatorname{sh}\dfrac{\Lambda}{2}}}, \qquad \nu_Д = \Lambda\sqrt{\frac{\sin\dfrac{\Lambda}{2} - \cos\dfrac{\Lambda}{2}\operatorname{sh}\dfrac{\Lambda}{2}}{\sin\dfrac{\Lambda}{2} + \cos\dfrac{\Lambda}{2}\operatorname{sh}\dfrac{\Lambda}{2}}} \ .$$

Граница $\mu = \pi$ ($\cos\mu = -1$) пересекает оси координат в точках

$$A_ф = -\pi^2, \ \Lambda^2 = 0 \ \text{и} \ A_ф = 0, \ \Lambda^2 \approx 14 \ .$$

Когда период фокусировки содержит ускоряющую структуру, то при выборе средней частоты поперечных колебаний μ надо учитывать устойчивость продольных колебаний. Режим работы обычно выбирают так, чтобы не выходить за пределы области устойчивости поперечных колебаний при любых фазах частиц, лежащих внутри сепаратрисы. Область устойчивых фаз продольных колебаний лежит в пределах

$$-\varphi_s < \varphi < 2\varphi_s \ .$$

Запишем параметр дефокусировки в виде

$$A_\phi = A_S \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_s}, \quad \text{где } A_S = \left(\frac{\pi S}{\beta\lambda}\right)^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2.$$

Тогда пределы изменения параметра дефокусировки есть

$$-A_S < A_\Phi < 2A_S \cos\varphi_s .$$

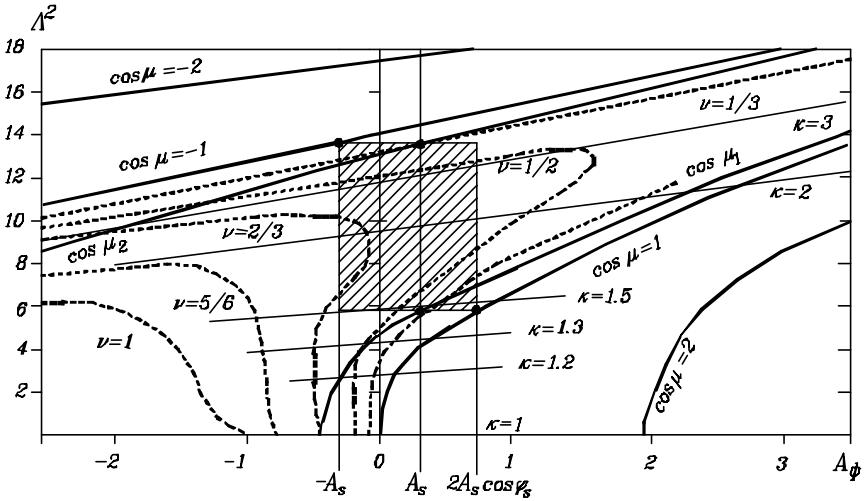


Рис. 7.4. Диаграмма совместной устойчивости при фокусировке квадрупольными линзами

Для обеспечения устойчивости поперечных колебаний всех частиц, захваченных в режим ускорения, рабочую точку следует выбирать внутри заштрихованного прямоугольника, который ограничен кривыми $\cos\mu = 1$ и $\cos\mu = -1$. Пределы допустимого изменения величины $\cos\mu$ для синхронной частицы определяется отрезком вертикальной прямой с абсциссой $A_\Phi = A_S$, лежащей в пределах

$$\cos\mu_1 < \cos\mu < \cos\mu_2 .$$

Для увеличения пропускной способности канала величину $\cos\mu$ следует выбирать в этих пределах так, чтобы обеспечить максимальное значение $\nu_\Phi = \nu_{\text{мин}} \sim 1/r^2_{\text{макс. огиб.}}$. На диаграмме устойчивости пунктиром нанесены линии постоянного значения $\nu = \nu_\Phi = \nu_{\text{мин}}$, а тонкой сплошной линией – отношение $\kappa = \nu_{\text{макс}} / \nu_{\text{мин}}$.

В более сложных случаях период может содержать несколько линз одного знака и несколько ускоряющих промежутков.

При медленном (адиабатическом) изменении параметров фокусирующего канала S, G и пучка β в процессе ускорения остается постоянной величина фазового объема пучка

$$V_{\text{п}} = \frac{1}{c}\gamma\,\omega_r r^2 = const\,.$$

При согласованном пучке полуось сечения достигает максимального значения $r = r_{max}$ при

$$\omega_r = \omega_{min} = \frac{v_{min}}{T_{\phi}} = \frac{v_{min}\beta\,c}{S}\,.$$

Отсюда следует, что в адиабатическом приближении

$$r_{max} \sim \left(\frac{S}{\beta\,\gamma\,v_{min}}\right)^{1/2}.$$

В симметричном случае при $\varepsilon = 0$ изображающие пучок фигуры на фазовых плоскостях $x, dx/d\tau$ и $y, dy/d\tau$ при медленных изменениях параметров сохраняют компактную форму – форму эллипсов, оси которых совпадают с осями координат. Можно сравнить результат с простым осциллятором $x'' + \omega^2 x = 0$, для которого при медленном изменении угловой частоты $x_{max} \sim \omega^{-1/2}$.

Глава 8

ФОКУСИРОВКА ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ПОЛЕМ

Высокочастотные квадрупольные линзы

В ускоряющем поле, представляющем собой чистую ускоряющую бегущую волну, достижение поперечной устойчивости движения частиц одновременно с продольной (фазовой) устойчивостью без добавления специального фокусирующего поля невозможно. В 1956 году В. В. Владимирский предложил метод обеспечения продольной и поперечной устойчивости за счет отказа от аксиальной симметрии высокочастотного поля в ускоряющих зазорах. В виде примера Владимирский рассматривал введение “рогов” в ускоряющий зазор (рис. 8.1, *a*).

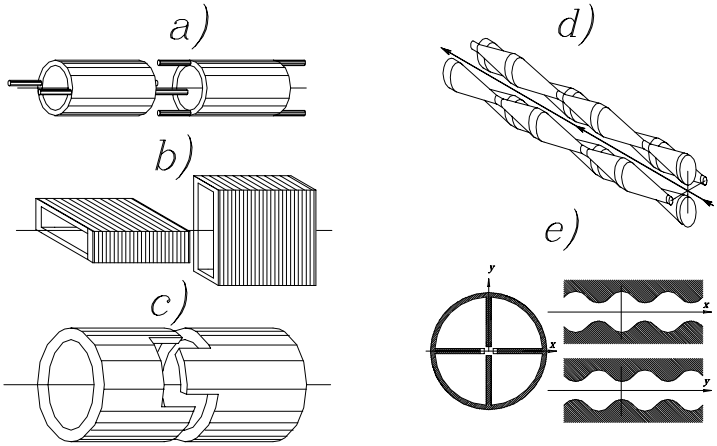


Рис. 8.1. Варианты каналов для квадрупольной ВЧ-фокусировки

Позднее В. А. Тепляков предложил для создания поперечных ВЧ-полей делать апертурное отверстие в пролетной трубке не круглым, а прямоугольным, причем каждую последующую трубку поворачивать на 90° относительно предыдущей (рис.8.1, *b*). Еще один вариант В. А Теплякова – на рисунке 8.1, *c*. На рисунке 8.1, *d* изображен вариант электродов, которые также обеспечивают высокочастотную квадрупольную фокусировку при подаче на них переменного напряжения. Н-резонатор с пилонами, имеющими в месте пролета пучка волнообразный профиль (рис. 8.1, е), – один из вариантов ускорителя протонов с высокочастотной квадруполь-

ной фокусировкой.

Считаем, что ускоряющая система составлена из обычных многозазорных резонаторов так, что ее период D содержит только один ускоряющий зазор. Пусть период фокусировки S содержит N линз (и зазоров), причем N – число четное, и за $N/2$ одноименных линз следует $N/2$ линз противоположного знака (т. е. повернутых на 90° вокруг продольной оси). Конфигурация поля в зазоре достаточно сложная. Для упрощения допустим, что реальной линзе эквивалентна некоторая простая квадрупольная линза без краевых эффектов, имеющая длину $l_\partial = \sigma\, \beta_s\, \lambda$ и расстояние между противоположными (однополярными) электродами $2a$, причем между разнополярными электродами линзы действует то же напряжение

$$U_m \cos\left(\omega\, t - \varphi_0\right), \tag{8.1}$$

что и в ускоряющем зазоре. Считая, что каждая линза во много раз короче периода фокусировки $S = ND$, положим, что действие линз сосредоточено в середине бесконечно узкого ускоряющего зазора.

Пусть $T = E_m D / U_m$ - коэффициент взаимодействия (фактор пролетного времени) для рассматриваемого ускоряющего зазора. Если отсчитывать координату z от электрического центра зазора, то продольное движение частицы в пределах периода ускорения приближенно описывается уравнением

$$\omega\, t - \varphi_0 = \frac{\omega\, z}{\beta_s\, c} - \varphi = \frac{2\pi\, z}{\beta_s\, \lambda} - \varphi\ . \tag{8.2}$$

Здесь и далее индекс s означает синхронную частицу.

Электрическое поле линзы при сделанных предположениях будет действовать на частицу в направлении оси x с силой

$$eE_x = \pm e \frac{U_m}{a} \cdot \frac{x}{a} \cos\left(\omega\, t - \varphi_0\right) = \pm e \frac{U_m}{a^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi\, z}{\beta_s\, \lambda} - \varphi\right) \cdot x\ , \tag{8.3}$$

или в среднем по периоду ускорения D при малой длине l_∂

$$\overline{F}_x = \pm \frac{x}{D} \int\limits_{-l_\partial/2}^{l_\partial/2} \frac{eU_m}{a^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi\, z}{\beta_s\, \lambda} - \varphi\right) dz = \pm \frac{eE_m \sigma\, \beta_s\, \lambda}{a^2 T} \cos\varphi \cdot x\ . \tag{8.4}$$

Для учета действия магнитного поля линзы добавим сюда множитель $1/\gamma_s^2 = 1 - \beta_s^2$. Считая, что как дефокусирующие, так и “линзовые” силы ускоряющего поля сосредоточены в середине плоскости зазора $z = z_{\text{ц}}$, уравнения поперечного движения запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\left(m\gamma_s\frac{dx}{dt}\right)=\left[\frac{\pi\, eE_m}{\beta_s\,\gamma_s^2\lambda}\sin\varphi\cdot\delta\left(\frac{z_ц}{D}\right)\pm\frac{eE_m\sigma\,\beta_s\,\lambda}{a^2\,\gamma_s^2 T}\cos\varphi\cdot\delta\left(\frac{z_ц}{D}\right)\right]\cdot x,$$
$$\frac{d}{dt}\left(m\gamma_s\frac{dy}{dt}\right)=\left[\frac{\pi\, eE_m}{\beta_s\,\gamma_s^2\lambda}\sin\varphi\cdot\delta\left(\frac{z_ц}{D}\right)\mp\frac{eE_m\sigma\,\beta_s\,\lambda}{a^2\,\gamma_s^2 T}\cos\varphi\cdot\delta\left(\frac{z_ц}{D}\right)\right]\cdot y. \qquad (8.5)$$

Уравнение для оси y отличается от уравнения для оси x только знаком при члене, описывающем действие квадрупольной линзы. Переходя к безразмерной координате $\tau=\beta\, c\, t/S$, приведем уравнение к уже применявшемуся виду (7.1):

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+Q_x(\tau)\cdot x=0\,. \qquad (8.6)$$

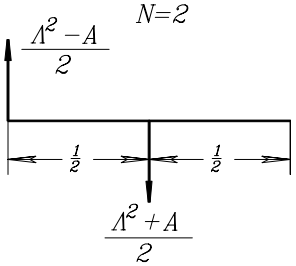
В нашем случае $g(\tau)=h(\tau)=\delta(z_ц/D)=\delta(N\cdot z_ц/S)=\delta(N\cdot\tau_ц)=\delta(\tau_ц)/N$, и выражения для $Q_{x(y)}(\tau)$ принимают вид

$$Q_x(\tau)=-\frac{A}{N}\delta(\tau_ц)\mp\frac{\Lambda^2}{N}\delta(\tau_ц),$$
$$Q_y(\tau)=-\frac{A}{N}\delta(\tau_ц)\pm\frac{\Lambda^2}{N}\delta(\tau_ц),$$

где $A=PE_m\sin\varphi$, $\Lambda^2=QE_m\cos\varphi$,

$$P=\frac{\pi\, eS^2}{mc^2\beta_s^3\gamma_s^3\lambda},\ Q=\frac{e\sigma\,\lambda\, S^2}{mc^2a^2T_s\gamma_s^3}\,. \qquad (8.7)$$

Для случая $N=2$ строение периода при фокусировке высокочастотными квадрупольными линзами показан на рисунке. Полная матрица периода представляет собой произведение матриц $T=H\cdot M_Ф\cdot H\cdot M_Д$, где $H=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ – матрица холостого промежутка,



$M_{\binom{Ф}{Д}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{A}{2}\pm\frac{\Lambda^2}{2} & 1\end{pmatrix}$ – матрицы фокусирующего и дефокусирующего зазоров.

Перемножив матрицы и взяв полусумму элементов главной диагонали матрицы периода, найдем величину $\cos\mu$:

$$\cos\mu=1+\frac{A}{2}+\frac{A^2-\Lambda^4}{32}\,. \qquad (8.8)$$

Диаграмма устойчивости в системе координат A, Λ^2 представлена на рисунке 8.2.

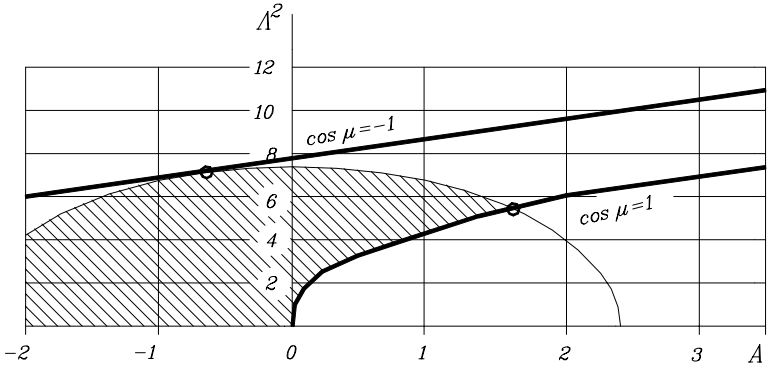


Рис. 8.2. Диаграмма совместной устойчивости при квадрупольной ВЧ-фокусировке

При изменении фазы φ в процессе фазовых колебаний рабочая точка (A, Λ^2) перемещается по дуге эллипса с полуосями PE_m и QE_m, описываемого в параметрической форме уравнениями (8.7), а в каноническом виде – уравнением

$$\left(\frac{A}{PE_m}\right)^2 + \left(\frac{\Lambda^2}{QE_m}\right)^2 = 1 . \qquad (8.9)$$

Начало и конец дуги эллипса, описываемого рабочей точкой, соответствуют фазам $\varphi = \varphi_{\text{мин}}$ и $\varphi = \varphi_{\text{макс}}$. Эта дуга должна целиком умещаться в границы рабочей области $|\cos\mu| < 1$, что приводит к ограничению E_m как сверху, так и снизу. Верхний предел E_m определяется касанием дуги эллипса с левой границей рабочей области, а нижний – совпадением правого конца дуги, соответствующего $\varphi = \varphi_{\text{макс}}$, с правой границей рабочей области.

Фазопеременная фокусировка (ФПФ)

В ускорителях с постоянной или медленно меняющейся равновесной фазой имеют место устойчивые фазовые колебания частиц около положительной равновесной фазы. При этом в окрестности отрицательной равновесной фазы продольное движение неустойчиво. Радиальные же силы,

действующие на частицу, наоборот, являются дефокусирующими при положительных фазах и фокусирующими - при отрицательных.

Фазопеременная фокусировка основана на периодическом изменении знака равновесной фазы вдоль ускорителя, т. е. на чередовании фазирующих и дефокусирующих участков с участками дефазирующими и фокусирующими. Результирующее действие этих чередующихся разноименных участков в соответствии с принципом знакопеременной фокусировки при выполнении некоторых условий оказывается одновременно как фазирующим, так и фокусирующим. Периодическое изменение равновесной фазы можно рассматривать как создание дополнительной гармоники (или группы гармоник) ускоряющего поля в целях фокусировки. Если ускоряющее поле помимо ускоряющей гармоники содержит хотя бы одну высшую или обратную гармонику, то в сопровождающей системе поле перестает быть электростатическим и становится знакопеременным. В. С. Ткалич предложил для этих целей использовать дополнительный генератор, работающий на кратной гармонике и создающий фокусирующую бегущую волну. Впервые ФПФ была предложена Гудом (Good M. L.) в 1953 году.

Рассмотрим принцип ФПФ на примере ускорителя с бегущей волной, состоящего из чередующихся фазирующих и дефазирующих полупериодов. Ввиду аксиальной симметрии полей движение частиц можно описать двумя уравнениями соответственно по продольной z и поперечной r координатам. Движение частиц на каждом полупериоде описывается фазовым и радиальным уравнениями

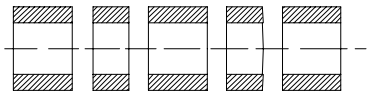
$$\frac{d}{dt}\left(m\gamma^3\,\frac{d(z-z_s)}{dt}\right)=eE_m\left(\cos\varphi-\cos\varphi_s\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\gamma\,\frac{dr}{dt}\right)=r\cdot\frac{\pi\,eE_m}{\lambda\beta_s\gamma_s^2}\sin\varphi. \qquad (8.10)$$

От полупериода к полупериоду равновесная фаза φ_s изменяется на $\pm\varphi_1$ относительно среднего значения φ_0, а амплитуда поля E_m - на ΔE относительно среднего значения E_0:

$$\varphi_s=\varphi_0\pm\varphi_1,\ E_m=E_0\pm\Delta E\,. \qquad (8.11)$$

Такое прерывистое изменение равновесной фазы можно обеспечить, например, периодическим изменением длин трубок дрейфа (см. рисунок).



Фазу неравновесной частицы можно записать следующим образом: $\varphi=\varphi_s+\Delta\varphi$. Здесь $\Delta\varphi$ - текущая фаза частицы. Параметры φ_0 и $\varepsilon=\Delta E/E_m$

характеризуют собой степень асимметрии сил, действующих на частицу.

Уравнения для малых фазовых колебаний и для поперечного движения частиц можно привести к виду

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + \left[- A_\phi \pm \Lambda_\phi^2\right]\sigma = 0,$$

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} + \left[- A_\rho \mp \Lambda_\rho^2\right]\rho = 0. \qquad (8.12)$$

В этих уравнениях использованы безразмерные координаты τ, σ и ρ, которые связаны с фазовыми отклонениями частиц $\Delta\varphi$ и радиальным отклонением r следующими соотношениями:

$$d\tau = \beta_s c dt / S\,,\ \sigma = \Delta\varphi\sqrt{p^3 S_0 / p_{s0}^3 S}\,,\ \rho = r\sqrt{p_s / p_{s0} S_0 S}\,.$$

Здесь p – импульс частицы, S – длина периода изменения равновесной фазы. Индексом “0” отмечены начальные, индексом “s” – равновесные значения величин. Коэффициенты A_ϕ, Λ_Φ^2, A_ρ и Λ_ρ^2 связаны с параметрами ускорителя следующим образом:

$$A_\phi = -2B\left(\sin\varphi_0 \cos\varphi_1 + \varepsilon\cos\varphi_0 \sin\varphi_1\right),$$

$$\Lambda_\phi^2 = 2B\left(\cos\varphi_0 \sin\varphi_1 + \varepsilon\sin\varphi_0 \cos\varphi_1\right),$$

$$A_\rho = B\left[\sin\left(\varphi_0 + \Delta\varphi\right)\cos\varphi_1 + \varepsilon\cos\left(\varphi_0 + \Delta\varphi\right)\sin\varphi_1\right],$$

$$\Lambda_\rho^2 = B\left[\cos\left(\varphi_0 + \Delta\varphi\right)\sin\varphi_1 + \varepsilon\sin\left(\varphi_0 + \Delta\varphi\right)\cos\varphi_1\right],$$

$$B = \frac{\pi\, eE_0}{mc^2}\cdot\frac{\lambda}{\beta_s\gamma_s^3}\cdot\left(\frac{S}{\beta_s\lambda}\right)^2. \qquad (8.13)$$

Полученные уравнения движения содержат знакопеременные коэффициенты, поэтому при определенных значениях своих коэффициентов имеют устойчивые решения. Диаграмма устойчивости для фазового уравнения приведена на рисунке 8.3. Решение будет устойчиво, если рабочая точка с координатами, равными коэффициентам этого уравнения, попадает внутрь области, ограниченную линиями $\left|\cos\mu\right| = 1$. Если при этом внутрь попадает также и представляющая точка радиального уравнения, то продольная и поперечная устойчивость частиц будет достигнута одновременно. Таким образом, задача нахождения оптимального варианта фокусировки сводится к отысканию условий, при которых обе изображающие точки попадут внутрь областей устойчивости одновременно. Оптимальный вариант можно найти с помощью специальной диаграммы совместной устойчивости. Она построена путем наложения друг на друга диаграмм устойчиво-

сти фазового и радиального уравнений и приведена на рисунке 8.4. Области совместной устойчивости на рисунке заштрихованы. Она ограничена кривыми $\left|\cos\mu_{\text{ф}}\right| = 1$ и $\left|\cos\mu_{\rho}\right| = 1$.

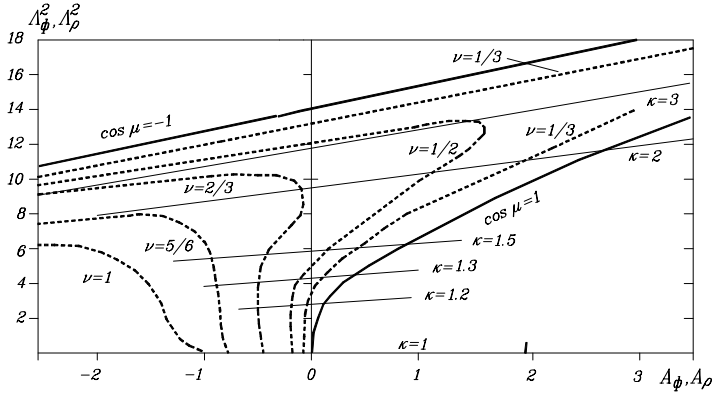


Рис. 8.3. Диаграмма устойчивости для продольных и поперечных колебаний частиц при фазопеременной фокусировке

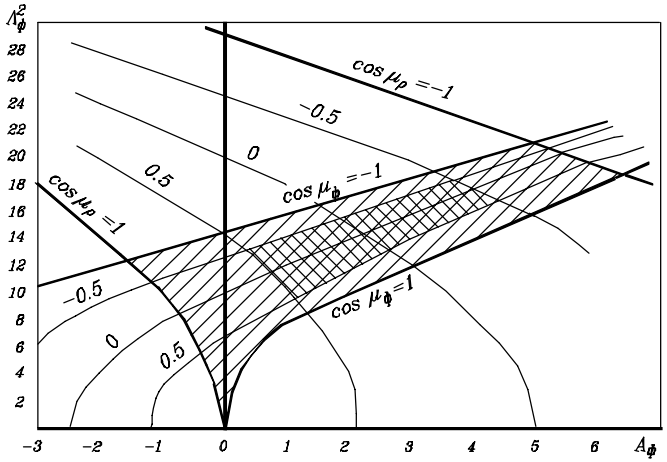


Рис. 8.4. Диаграмма совместной устойчивости при фазопеременной фокусировке

Выбор значений A_ϕ и Λ_ϕ^2 в пределах заштрихованной области обеспечивает совместную устойчивость частиц, близких к равновесной ($\Delta\varphi \approx 0$). Обычно режим знакопеременной фокусировки выбирают так, чтобы выполнялось неравенство $\left|\cos\mu_{\text{ф},\rho}\right| \le 0{,}5$. На рисунке эта область выделена двойной штриховкой. Далее в качестве рабочей точки выбирают точку, которая расположена внутри области и имеет координаты $A_\phi \approx 1$, $\Lambda_\phi^2 = 12$. При таком выборе мгновенные частоты фазовых и радиальных колебаний достаточно высоки: $\nu_\phi = 0{,}4$, $\nu_\rho = 0{,}8$. Из рисунка видно, что практически вся область оптимального режима фокусировки лежит в интервале положительных значений A_ϕ, т. е. там, где частицы подвергаются со стороны ускоряющего поля воздействию постоянной дефазирующей, а не фазирующей силы, как это имеет место в ускорителях с автофазировкой.

Глава 9

ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ, ИМПЕДАНСЫ И ПОТЕНЦИАЛЫ ИЗЛУЧЕНИЯ

При пролете периодической ускоряющей структуры заряженная частица излучает электромагнитное поле в структуру. Тогда на саму частицу и другие окружающие ее частицы начинает действовать дополнительная сила собственного поля излучения. Ранее это поле излучения мы учитывали как поле когерентного излучения точечных сгустков, летящих на расстоянии длины волны друг от друга. При расчете динамики одиночного короткого сгустка такое поле отсутствует. Кроме внешних фокусирующих полей, остается сила кулоновского взаимодействия между частицами в сгустке. Однако, как было показано раньше, в высокоэнергетическом сгустке силы пространственного заряда можно считать пренебрежимо малыми. Тогда на частицы в пучке действуют только силы собственного поля излучения сгустка.

Для периодических функций от времени, таких, как ток $I(t)$ для сгруппированных сгустков с периодом Δt, имеем

$$I(t)=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{jn\omega t}\equiv I_0+\sum_{1}^{\infty}I_n(\omega_n t), \tag{9.1}$$

где $\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2}I(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$, $I_n=a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t$, $I_0=\frac{\alpha_0}{2}$,

$$\omega_n=n\omega_0\equiv\frac{2\pi n}{\Delta t},\ a_n=(\alpha_n+\alpha_{-n})/2,\quad b_n=j(\alpha_n-\alpha_{-n})/2.$$

Введем предел при $\Delta t\to\infty$, $\omega_0\to 0$. Положим $n\omega_0=\omega$, а $\omega_0=d\omega$, и пусть $I(\omega)=\alpha_n/\omega_0$ есть плотность на частоте ω Фурье компонент в $I(t)$ при $\omega_0\to 0$. Тогда ток можно представить интегралом Фурье для функции ток $I(t)$ как

$$I(t)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}dt\equiv\overline{I(\omega)},$$

$$I(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}I(t)e^{-j\omega t}dt\equiv\overline{I(t)}. \tag{9.2}$$

В случае гауссового пучка с зарядом q и параметром группировки σ_t будем иметь

$$I(t)=\frac{q}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}\right),$$

$$I(\omega)=\frac{q}{\pi}\exp\left(-\frac{\omega^2\sigma_t^2}{2}\right). \qquad (9.3)$$

Коэффициенты нормализации в Фурье-преобразовании выбраны так, чтобы интегрировать $I(\omega)$ как спектральную плотность линий для симметричных сгустков с $\omega_0 = 2\pi I_0 / q$. Амплитуда каждой линии есть, таким образом, временная плотность выделенной линии. Для случая гауссовского сгустка

$$a_n = \omega_0 I(\omega) = 2I_0 \exp\left(-n^2\omega_0^2\sigma_t^2 / 2\right). \qquad (9.4)$$

Любую ускоряющую систему можно представить как некоторую эквивалентную схему с импедансом $Z(\omega)$. Если синусоидальный ток частоты ω, имеющий максимальное значение $I(\omega)$, проходит через такую схему, то он наводит в ней напряжение $V(\omega)$:

$$V(\omega) = Z(\omega)\cdot I(\omega).$$

То есть расчет полей излучения можно проводить, используя хорошо разработанный аппарат эквивалентных схем и импедансов.

Более физичное рассмотрение полей излучения заключается в следующем. Рассмотрим единичный заряд, пролетающий систему. Он наводит в системе некоторое поле. Так как частица летит со скоростью света, то это поле будут чувствовать только сзади летящие частицы. Наведенный потенциал (wake potential) $W(\tau)$ есть потенциал, чувствуемый опытной частицей, следующей на расстоянии $c\tau$ после единичного заряда. Летящая в свободном пространстве с постоянной скоростью частица не излучает, то есть $W(\tau)$ для такой частицы равен нулю. Полный потенциал, который приобретает частица в зависимости от времени t с учетом ее окружения, следует прямо из определения потенциала возбуждения:

$$V_b(t) = \int_{-\infty}^{t} W(t-\tau)\cdot I(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} W(\tau)\cdot I(t-\tau)\,d\tau\,. \qquad (9.5)$$

Таким образом, и $Z(\omega)$, и $W(\tau)$ могут достаточно полно характеризовать эффекты, производимые полем излучения пучка. Боле того, так как они описывают одни и те же процессы, между ними существует непосредственная связь. В случае эквивалентных схем $W(\tau)$ есть напряжение в цепи, наводимое единичным импульсом $I(t) = q\delta(t)$.

Отклик системы на единичную ступеньку тока может также полно ис-

пользоваться в расчетах эквивалентных схем. Если $S(\tau)$ есть отклик системы на единичную ступеньку тока, то соотношение между ступенчатой и импульсной функциями есть

$$S(\tau) = \int_0^{\tau} W(\tau')d\tau' .$$

Отметим, что $W(\tau)$ измеряется в вольтах на кулон (В/К) или в омах на секунду (Ом/с), тогда как $S(\tau)$ - в омах (Ом). Выражения $W(\tau)$ и $S(\tau)$ для различных элементов цепей показаны на рисунке 9.1.

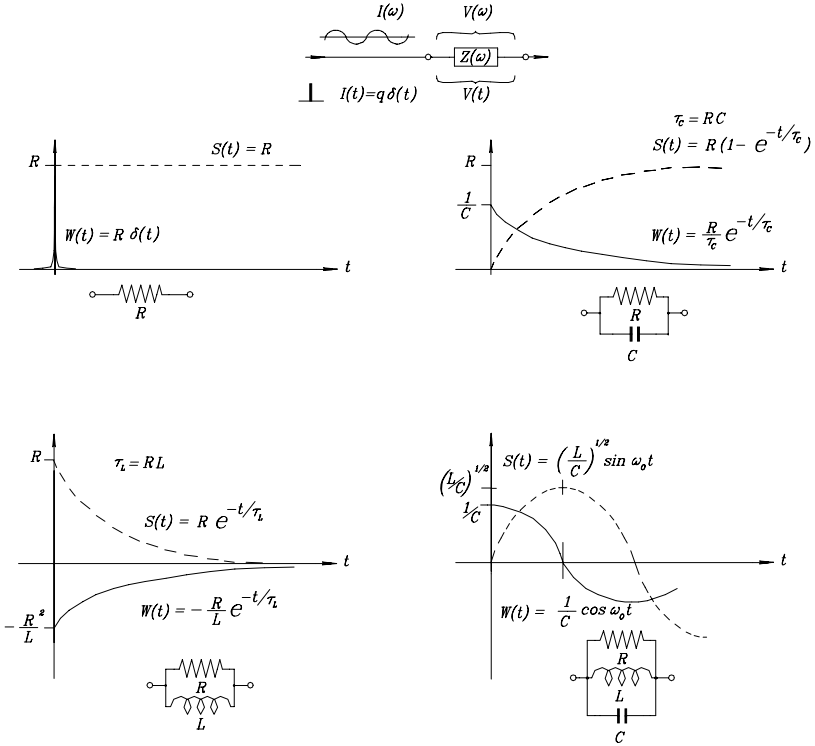


Рис. 9.1. Выражения $W(\tau)$ и $S(\tau)$ для различных элементов цепей

Общие потери энергии заряда q в терминах параметра потерь k, введенного ранее, есть $\Delta U = kq^2$. Тогда

$$k = \frac{1}{q^2}\int_{-\infty}^{\infty} V_b(t)I(t)dt\,. \qquad (9.6)$$

Возьмем преобразование Фурье от (9.5):

$$\overline{V_b(t)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}dt\int_{0}^{\infty} W(\tau)I(t-\tau)d\tau\,. \qquad (9.7)$$

Меняя порядок интегрирования и положив $t = \tau + t'$, найдем

$$V(\omega) \equiv \overline{V_b(t)} = \pi I(\omega)\overline{W(\tau)}\,. \qquad (9.8)$$

Так как $Z(\omega) = V(\omega) / I(\omega)$, то мы имеем

$$Z(\omega) = \pi\overline{W(\tau)}\,,$$
$$V(\omega) = \overline{V_b(t)}\,,$$
$$I(\omega) = \overline{I(t)}\,. \qquad (9.9)$$

Вообще говоря, $Z(\omega)$ – комплексная величина $Z(\omega) = Z_R(\omega) + jZ_I(\omega)$. Но можно показать, что

$$W(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} Z_R(\omega)\cdot\cos(\omega\tau)d\omega\,, \qquad (9.10)$$

$$k = \frac{\pi}{q^2}\int_{0}^{\infty} Z_R(\omega)I^2(\omega)d\omega\,. \qquad (9.11)$$

Для гауссовского сгустка, используя (9.3), получим

$$k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} Z_R(\omega)e^{-\omega^2\sigma_t^2}d\omega\,. \qquad (9.12)$$

Концепция $Z(\omega)$ и $W(\tau)$ применима для частиц и токов, проходящих не только ускоряющие структуры, но и другие элементы конструкций ускорителей, например, вакуумные объемы пролетных камер, имеющие различные неоднородности в сечении канала и т. д.

Продольные поля излучения

Итак, будем описывать продольную динамику ультрарелятивистских сгустков в ускоряющих структурах с помощью полей возбуждения (wake fields). Если единичный заряд проходит систему, то наведенный потенциал (wake function) $w(\tau)$ или $w(s)$ есть потенциал, чувствуемый опытной частицей, следующей на расстоянии $s = c\tau$ после единичного заряда. Полный

наведенный потенциал (wake potential) для сгустка с продольной плотностью заряда $q(s)$ и полным зарядом Q, действующий на частицу, находящуюся в точке s, есть

$$W(s)=\frac{1}{Q}\int_{-\infty}^{s} w(s-s')\cdot q(s')ds'=\frac{1}{Q}\int_{0}^{\infty} w(s')\cdot q(s-s')ds' \quad [\text{В/пК/м}]\,. \qquad (9.13)$$

Потери энергии всего сгустка характеризуются параметром потерь (loss factor)

$$K=\frac{1}{Q}\int_{-\infty}^{\infty} W(s)\cdot q(s)ds \quad [\text{В/пК/м}]\,. \qquad (9.14)$$

Если плотность заряда в сгустке имеет гауссовское распределение

$$q(s,\sigma)=Q\cdot\frac{dn_e}{ds}=Q\cdot G(s,\sigma)=Q\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{s^2}{2\cdot\sigma^2}}, \qquad (9.15)$$

то параметр потерь можно записать

$$K(\sigma)=\int_{0}^{\infty} w(s)\cdot G(s,\sqrt{2}\cdot\sigma)ds\,. \qquad (9.16)$$

В периодической ускоряющей структуре с бегущей волной параметр потерь для n - й моды колебаний определяется как

$$k_n=\frac{\omega_n}{4}\left(\frac{R_{sh}}{Q}\right)_n=\frac{E_n^2}{4W_n} \quad [\text{В/К/м}], \qquad (9.17)$$

где E_n - амплитуда синхронной пространственной гармоники с аксиальным электрическим полем для n - й моды, а W_n - запасенная энергия на единицу длины, просуммированная по всем *пространственным* гармоникам этой моды. Величины ω_n и k_n получаются решением граничных задач для “беззарядного” резонатора или структуры. С увеличением частоты число мод на единицу частотного интервала также увеличивается. Так как есть предел общего числа мод, которые можно посчитать в реальное машинное время, то есть соответствующий частотный максимум для суммы в выражениях для наводимого потенциала и параметра потерь. Если этот предел есть ω_m, то детальный анализ возбуждающих полей возможен только для интервалов времени $\Delta\tau\le\omega_m^{-1}$, а параметр потерь будет неточен для сгустков длиной $\sigma_t\le\omega_m^{-1}$. Для цилиндрического резонатора радиуса b и длиной L можно показать, что плотность мод примерно $dn/d\omega=\omega bL/(2\pi c^2)$. В случае КДВ потери точечного заряда в высокочастотных модах могут быть рассмотрены как результат дифракционных

потерь с помощью эквивалентных плоских волн, имеющих ту же мощность спектра и вектор Пойтинга на радиусе диска как и действующее поле заряда. Это так называемая статическая модель резонатора для потерь энергии точечным зарядом, проходящим через периодическую последовательность тонких диафрагм с круглыми отверстиями. В приближении высокой энергетичности сгустка ($\gamma >> \omega a / c$, где a - радиус отверстия) параметр потерь на единицу интервала частот представляется в этой модели как

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{\pi} Z_R(\omega) = \frac{A_0}{\omega^{3/2}} . \qquad (9.18)$$

Потенциал возбуждения, используя это 'аналитическое' представление, для потерь на всех частотах $\omega \geq \omega_m$ есть, таким образом,

$$W_a(\tau) = 2A_0 \int_{\omega_m}^{\infty} \frac{\cos(\omega\tau)}{\omega^{3/2}} d\omega = \frac{4A_0}{\omega_m^{3/2}} \left\{ \cos x - \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \left[1 - 2S\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}} \right) \right] \right\}_{x=\omega_m \tau}$$

где S - интеграл Френеля. Константа A_0 может быть в принципе определена аналитически по крайней мере для структур с бесконечно тонкими дисками.

Приведенные рассуждения были применены для расчета возбуждения КДВ в SLAC (УС с периодом $d = \lambda/3$ = 34,99 мм, толщина диафрагмы (d - g) = 5,8 мм, внешний радиус b=41,34 мм, радиус апертуры a=11,63 мм). Потенциал возбуждения для первых 10 пс показан на рис. 9.2. Прерывистая линия - результат суммирования 416 расчетных мод. Общее возбуждение (непрерывная линия) - получается прибавлением аналитического расширения. Отметим, что общее возбуждение имеет при τ=0 конечную величину $W(0)$ = 8 В/пс/период. Для сравнения показан потенциал возбуждения только ускоряющей моды (в этом диапазоне τ она почти постоянна - период ~ 350 пс с амплитудой 1/6 от $W(0)$). На рис. 9.3 показан продольный потенциал возбуждения УС на интервале 0-300 пс. Большой отрицательный (ускоряющий) пик на 200 пс - первое отражение от внешней стенки, достигающее оси структуры. Показан еще раз потенциал возбуждения основной моды, которая испытывает почти полный период осцилляции. После 5 - 10 периодов будет доминировать часть возбуждения, отвечающая высшим модам, имеющим почти полную некогерентность. На приведенном графике не учитывалось затухание волн при распространении их в реальной УС. Затухание может быть найдено в результате уменьшения каждого члена ряда на $\exp(-\alpha_n \tau)$, где α_n - постоянная затухания n-й моды. Во временной области до 10-20 пс потенциал возбуждения можно описать эмпирической формулой

$$W(\tau) = A \cdot \exp\left[-(\tau / B)^n\right], \qquad (9.19)$$

где A = 226 В/пК/м ~ ω^2, B=6,13 пс ~ ω^{-1}, n = 0,605.

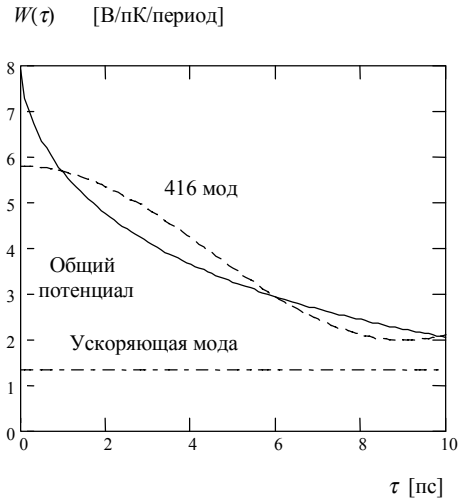
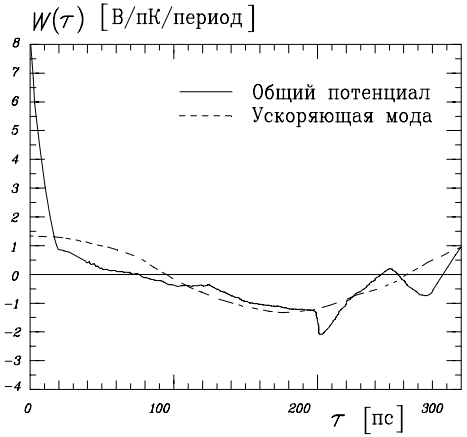


Рис. 9.2. Продольный потенциал возбуждения на ячейку $W(\tau)$



для SLAC-структуры для первых 10 пс

Рис. 9.3. Продольный потенциал возбуждения для SLAC-структуры на интервале 0-300 пс

Поле, наводимое сгустком в ускоряющей структуре, в точке s равно

$$E_b(s) = Q \cdot W(s) \quad [\text{В/м}] . \tag{9.20}$$

Для гауссовского сгустка уравнение (9.5) может быть записано

$$E_b(t) = \frac{e\,c\,A\,N_b}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\left(\frac{t-t'}{B}\right)^n\right] \exp\left[-\frac{t'^2 c^2}{2\sigma_z^2}\right] d\,t' . \tag{9.21}$$

Результат для SLAC-структуры на 2856 МГц для различных величин σ_t показан на рис. 9.4.

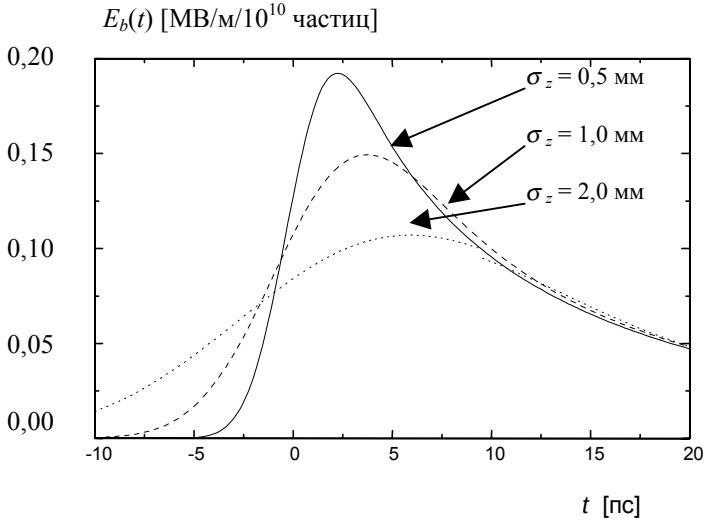


Рис. 9.4. Напряженность поля излучения внутри гауссовского сгустка SLAC-структуры для трех различных длин σ_z

Общее поле, действующее на ускоряемую частицу, есть сумма поля внешнего генератора и поля излучения самого сгустка:

$$E(s) = E_{rf}(s) - E_b(s) = E_{gen}\cos\left(\omega \cdot \frac{s}{c} - \theta\right) - Q \cdot W(s) \quad [\text{В/м}], \tag{9.22}$$

Здесь θ - угол, на который центр сгустка опережает гребень ускоряющей волны от внешнего источника. Подстройкой этого угла, увеличивающего наклон формы ускоряющего напряжения, можно уменьшить общий разброс энергии частиц в пучке по сравнению со случаем при $\theta = 0$. Это схематически показано на рис. 9.5. Отметим, однако, что уменьшение в разбросе энергии достигается за счет уменьшения средней энергии пучка на единицу длины. Средняя энергия, набираемая пучком на единице длины,

равна $$E_a = \frac{1}{Q}\int_{-\infty}^{\infty} E(s)\cdot q(s)ds \qquad [\text{эВ/м}] \qquad (9.23)$$

Пример: Ускоряющая структура SLAC на полную энергию V_0 =50 ГэВ, со средним темпом ускорения $\overline{E_a} = 17$ МэВ/м для ускорения сгустка частиц с $N_b = 5\cdot 10^{10}$ и $\sigma_z = 1{,}0$ мм. Разброс энергии $\Delta V / V_0$, который содержит 90 % частиц, и средняя энергия частиц $\overline{V} / V_0$ изображены на рис. 9.6. как функция фазового угла θ.

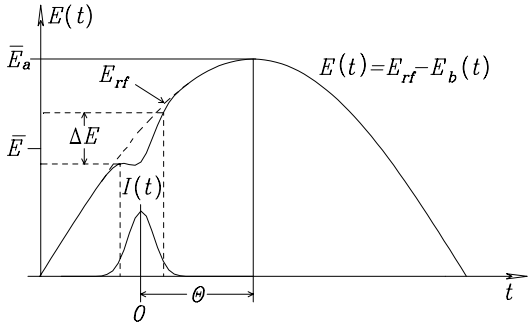


Рис. 9.5. Диаграмма сложения поля генератора и поля излучения сгустка

В этом примере энергетический разброс при θ = 13° уменьшается в 4 раза по сравнению со случаем θ = 0°, но за счет увеличения на 2-1/2 % потерь в средней энергии на частицу.

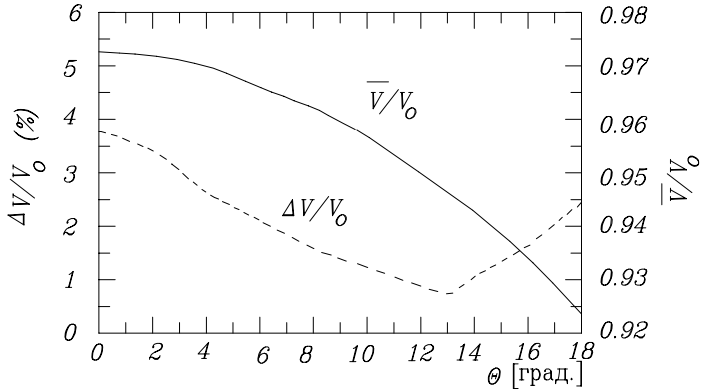


Рис.9.6. Энергетический разброс и средний относительный разброс энергии SLAC-структуры

На рисунке 9.7 показан энергетический спектр частиц на выходе доускорителя для сгустка с $N_e = 5 \cdot 10^{10}$, $\sigma_z = 1{,}4$ мм и $E_{gen} = 17$ МэВ/м.

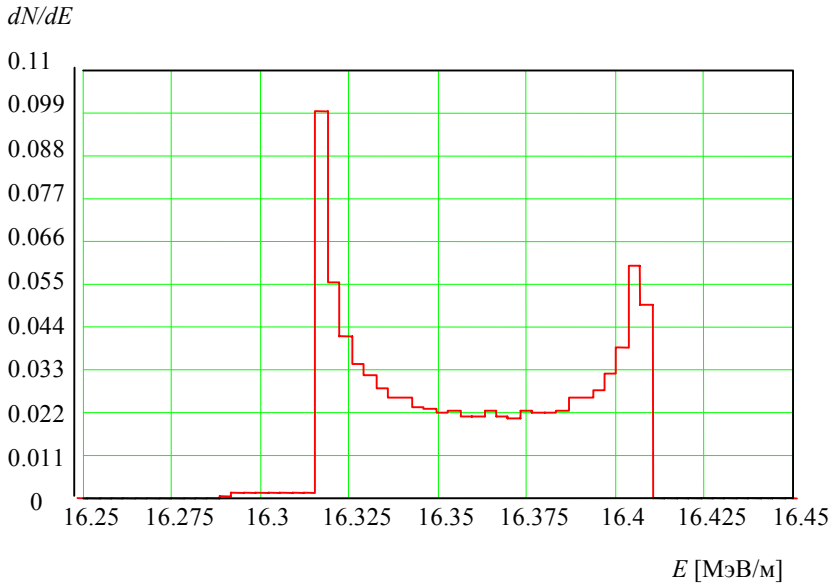


Рис.9.7. Энергетический спектр частиц на выходе доускорителя

Средний прирост энергии сгустка $E_a = 16{,}36$ МэВ/м, разброс энергии в сгустке, содержащем 90 % частиц $\Delta E/E_a = 0{,}73$ %.

Поперечные поля излучения

Для аксиально симметричной структуры компонента синхронной пространственной гармонии n-й моды бегущей волны записывается как

$$E_{zn} = E_{on}\left(\frac{r}{a}\right)^m \cos(m\varphi)\cos\left[\omega_n(t - z/c)\right], \qquad (9.24)$$

где E_{on} - амплитуда электрического поля на радиусе апертуры a. Для этой моды параметр потерь

$$k_n \equiv \frac{E_{on}^2}{4W_n} \qquad (9.25)$$

может быть опять определен в терминах “холодных” (без заряда) электромагнитных свойств структуры. Используя тот же формализм, что и в про-

дольных полях излучения, k_n может также описывать взаимодействие точечного заряда с интересующей модой. Однако энергия излучения на единицу длины в n-й моде для заряда q, двигающегося параллельно оси на радиусе $r=r_q$, есть

$$W_n = k_n \left(\frac{r_q}{a} \right)^{2m} q^2 . \tag{9.26}$$

Исключая W_n с использованием двух предыдущих выражений

$$E_{on} = -2 \left(\frac{r_q}{a} \right)^m k_n q . \tag{9.27}$$

Тогда индуцированное поле в точке r, на азимутальном угле φ (предполагается, что движущийся заряд находится на φ=0) на расстоянии $\Delta z = c\tau$ после заряда q, находящемся на радиусе r_q, есть

$$E_{zn} = -2k_n q \left(\frac{r}{a} \right)^m \left(\frac{r_q}{a} \right)^m \cos(m\varphi) \cos(\omega_n \tau). \tag{9.28}$$

Для m=0 можно видеть, что продольный потенциал возбуждения на единицу длины восстанавливается.

Теперь найдем поперечное (отклоняющее) поле излучения на единицу длины структуры как

$$\vec{W}_t(\tau) = (c/e) \frac{d\vec{p}_t}{dz} = \left(\vec{E}_t + c\vec{B}_t \right), \tag{9.29}$$

где $d\vec{p}_t / dz$ – изменение поперечного момента импульса на единицу длины структуры для частицы, следующей на расстоянии $c\tau$ за единичным зарядом. Поперечные поля оцениваются в системе отсчета, которая движется с частицей. Следуя теореме Панофского-Венцеля, можно показать, что изменение момента импульса в такой системе отсчета может быть выражено только в терминах компонент E_z- поля:

$$\left(\vec{E}_t + c\vec{B}_t \right) = j(c/e) \vec{\nabla}_t E_z , \tag{9.30}$$

Тогда поперечное поле излучения можно записать

$$\vec{W}_{tn} = (c/e) \sin(\omega t) \left(\hat{\vec{r}} \frac{\partial |E_{zn}|}{\partial r} + \hat{\vec{\varphi}} \frac{1}{r} \frac{\partial |E_{zn}|}{\partial \varphi} \right), \tag{9.31}$$

где $\hat{\vec{r}}$ и $\hat{\vec{\varphi}}$ – единичные вектора. Выражения для компонент поля излучения

$$\vec{r}: \qquad W_{tn}(r,\varphi,\tau) = 2m\left(\frac{k_n c}{\omega_n a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{m-1}\left(\frac{r_q}{a}\right)^{m}\cos(m\varphi)\sin(\omega_n\tau), \tag{9.32}$$

$$\vec{\varphi}: \qquad W_{tn}(r,\varphi,\tau) = -2m\left(\frac{k_n c}{\omega_n a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{m-1}\left(\frac{r_q}{a}\right)^{m}\sin(m\varphi)\sin(\omega_n\tau). \tag{9.33}$$

Наибольший интерес представляет $\hat{\vec{r}}$ -я компонента дипольного (m=1) поля излучения при φ=0:

$$W_{dn}(\tau) = 2\left(\frac{k_n c}{\omega_n a}\right)\left(\frac{r_q}{a}\right)\sin(\omega_n\tau). \tag{9.34}$$

Отметим, что амплитуда дипольного поля излучения зависит от продольной координаты r_q выходящего единичного заряда, но что после r_q поле излучения не зависит от r. Для многомодового режима

$$W_{dn}(\tau) = 2\left(\frac{r_q}{a}\right)\sum_n \frac{k_n c}{\omega_n a}\sin(\omega_n\tau). \tag{9.35}$$

Предполагая, что $dk_n / d\omega = A_1 / \omega^{3/2}$, мы можем просчитать, как и ранее, аналитическое расширение для высших мод, начиная с ω_m :

$$W_{da}(\tau) = \left(\frac{r_q}{a}\right)\left(\frac{4A_1 c}{\omega_m^{3/2} a}\right)\frac{x}{3}\left\{2\cos x + \frac{\sin x}{x} - \sqrt{2\pi\, x}\left[1 - 2S\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right)\right]\right\}_{x=\omega_m\tau}$$

Величины ω_n и k_{dn} могут быть посчитаны для аксиально симметричной структуры с использованием, например, программы TRANSVERS. Результаты расчетов поперечных полей излучения на ячейку для SLAC-структуры представлены на рис. 9.8 и 9.9 .

Иногда полезно определить поперечный дипольный импеданс на единицу длины структуры

$$Z_d(\omega) = -j\frac{(E_t + B_t)}{I_0 \Delta r}, \tag{9.36}$$

где E_t и B_t – компоненты поперечного отклоняющего поля, произведенные средним протекающим током I_0 , имеющим синусоидальную модуляцию с амплитудой Δr при частоте ω. Для элементов ускоряющего тракта или для накопительного кольца длиной L поперечный импеданс есть

$$Z_d(\omega) = V_t(\omega) / I_d(\omega), \tag{9.37}$$

где $\quad V_t(\omega) = \int_0^L \left(\vec{E} + \vec{c} \times \vec{B}\right)_t dz\,, \quad I_d(\omega) = q\Delta r / \pi\,.$

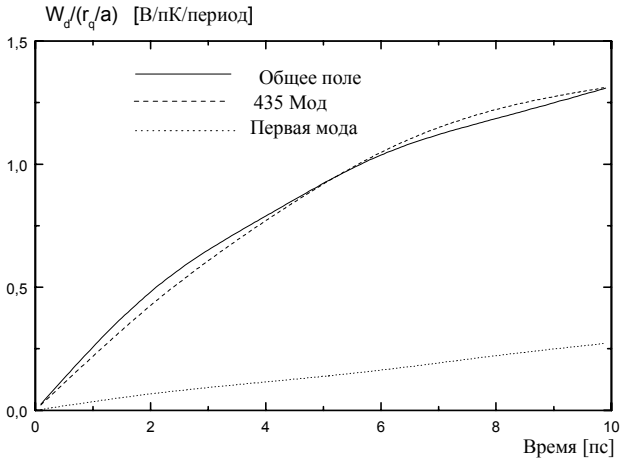


Рис. 9.8. Дипольное поле излучения на ячейку для SLAC-структуры для первых 10 пс

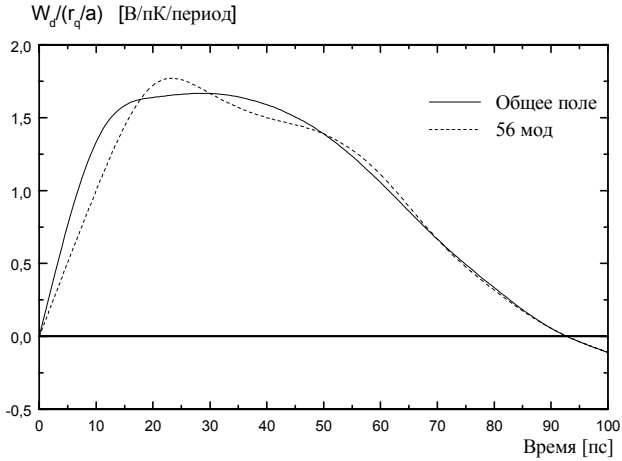


Рис. 9.9. Дипольное поле излучения на ячейку для SLAC-структуры на интервале 0-100 пс

Для резонаторов можно показать, что

$$\frac{Z_d}{Q} = \frac{2ck_d}{\omega^2 a^2} . \qquad (9.38)$$

Для типичных дипольных и продольных мод, имеющих одинаковое E_z на радиусе диафрагмы в КДВ, предполагаем $k_d \approx 4k_l$, однако плотность поперечных мод на единицу частотного интервала в два раза больше, так как одновременно могут сосуществовать две моды – ТЕ и ТМ. Используя также факт, что $k_l = (\omega/2)(Z_l/Q)$ для продольной моды (полагаем R_a=2Z_l в (9.38)), мы получим

$$Z_d = \frac{2c}{\omega a^2} Z_l . \qquad (9.39)$$

Это выражение часто используется для оценки границы дипольного импеданса, если известен продольный импеданс.

Применяя выражение для $\hat{\vec{r}}$-й компоненты $W_{tn}(r,\varphi,\tau)$ в (9.32), можно получить при m=2 квадрупольный потенциал поля возбуждения:

$$W_{qn}(\tau) = 4\left(\frac{r_q}{a}\right)^2 \left(\frac{r}{a}\right) \sum_n \frac{k_n c}{\omega_n a} \sin \omega_n \tau . \qquad (9.40)$$

Поперечная динамика пучка, двухчастичная модель

В протяженном сгустке каждая частица взаимодействует с поперечным полем, возбужденным всеми остальными частицами сгустка, которые пролетели до нее. При расчете поперечной динамики релятивистского сгустка силы пространственного заряда между частицами также можно считать пренебрежимо малыми. Линейная плотность заряда в сгустке

$$q(z) = Q \cdot \frac{dn_e}{dz} = Q \cdot G(z) = (e \cdot N_e) \cdot G(z) \quad \text{[К/м]}, \qquad (9.41)$$

где Q - полный заряд сгустка, N_e - число частиц в сгустке.

Полагается, что сгусток имеет нулевой поперечный размер, так как он много меньше диаметра апертуры ускоряющей структуры. Поперечное отклонение в сгустке от оси $x(s,z)$ есть функция z- продольного положения относительно центра сгустка и s – расстояния от начала ускорителя. Для аксиально симметричной ускоряющей структуры поперечное поле излучения характеризуется в первом приближении дипольным потенциалом поля излучения (dipole transverse wake function) $w_d(z)$ или $w_d(\tau)$, имеющим обычно размерность [В/пК/м^2]. $w_d(z)$ есть поперечный потенциал на

единицу длины структуры, чувствуемый опытной частицей, следующей на расстоянии $z = c\tau$ после единичного заряда, находящегося на единичном расстоянии от оси структуры. Полный дипольный потенциал поля излучения для сгустка с продольной плотностью заряда $q(z)$, полным зарядом Q, находящегося на расстоянии $x(s,z)$ от оси, действующий на частицу, есть

$$W_d(s,z) = \frac{1}{Q}\int_{-\infty}^{z} q(z')\cdot w_d(z-z')\cdot x(s,z')dz' =$$

$$= \int_{0}^{\infty} G(z-z')w_d(z')\cdot x(s,z-z')dz' \quad [\text{В/пК/м}]\,. \qquad (9.42)$$

Поперечные поля, наводимые сгустком в ускоряющей структуре, по определению полного поперечного потенциала излучения $W_\perp$ равны

$$\left(\vec{E}_b + \left[\vec{c}\times\vec{B}_b\right]\right)_\perp = Q\cdot W_\perp(s,z) \qquad [\text{В/м}]. \qquad (9.43)$$

Тогда в дипольном приближении поперечная сила, действующая на заряженную частицу, есть

$$F_\perp(s,z) = e\cdot[Q\cdot W_d(s,z)] = e\cdot Q\int_{0}^{\infty} G(z-z')w_d(z')\cdot x(s,z-z')dz'\,, \quad (9.44)$$

а уравнение поперечного движения частиц по оси x в линейном ускорителе с периодической фокусировкой запишется в виде

$$\frac{d}{ds}\left\{\gamma\frac{d}{ds}x(s,z)\right\} + k_\beta{}^2\cdot\gamma\cdot x(s,z) = Q\int_{0}^{\infty} G(z-z')\cdot\frac{e\cdot w_d(z')}{mc^2}\cdot x(s,z-z')dz'\,,$$

где $\gamma = \gamma(s)$ – энергия сгустка в точке s в единицах mc^2,

$k_\beta = k_\beta(s) = 2\pi/\lambda(s)$,

$\lambda(s)$ – зависимость длины бетатронных колебаний от s.

Наведенный дипольный потенциал поля излучения $w_d(\tau)$ рассчитывается для каждой конкретной конфигурации ускоряющей структуры. Для получения $w_d(\tau)$ [В/пК/м^2], используемого в формулах, надо значение из графика $W_d(\tau)/(r_q/a)$ [В/пК/м], аналогичного SLAC (рис. 9.2), поделить на радиус апертуры a [м].

Расчет поперечного движения для случая произвольного распределения заряда в сгустке с учетом внешнего фокусирующего поля – довольно трудная задача. Наиболее простая модель, которая включает все сущест-

венные физические ситуации,– так называемая двухчастичная модель. В соответствии с этой моделью Гауссовский пучок размера σ_z с полным зарядом Q разбивается на два:

$$G(z) = \frac{1}{2} \cdot \delta\left(z + \sigma_z\right) + \frac{1}{2} \cdot \delta\left(z - \sigma_z\right), \tag{9.45}$$

то есть “головной” заряд $Q/2$, находящийся в точке $z = +\sigma_z$ и имеющий поперечную координату x_1 (s), и “хвостовой” заряд $Q/2$, находящийся в точке $z = -\sigma_z$, с поперечной координатой x_2 (s). Уравнения для поперечного движения этих зарядов запишутся как

$$\frac{d^2 x_{1,2}}{ds^2} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{ds} \cdot \frac{dx_{1,2}}{ds} + k_\beta{}^2 \cdot x_{1,2} = \begin{cases} 0 & \text{для } x_1(s), \\ \dfrac{Q}{2} \cdot \dfrac{e \cdot w_d\left(2 \cdot \sigma_z\right)}{\gamma \cdot mc^2} \cdot x_1(s) & \text{для } x_2(s). \end{cases}$$

При достаточно медленном изменении энергии вторым членом с первой производной обычно пренебрегают. Параметр фокусирующей системы $k_\beta(s)$ характеризует градиент магнитного поля квадрупольных линз, установленных на ускоряющем канале. Будем считать его постоянной величиной $k_\beta(s) = k_\beta$. При этом надо помнить, что для этого необходимо, чтобы градиент магнитного поля квадрупольных линз увеличивался вдоль ускорителя пропорционально набираемой энергии.

Зависимость $x_1(s)$характеризует поведение заряженной частицы в канале с квадрупольной фокусировкой без учета сил пространственного заряда и поперечных СВЧ-сил, которыми мы пренебрегли в случае релятивистского сгустка. Зависимость $x_2(s)$ можно рассматривать как поведение всего сгустка в канале с квадрупольной фокусировкой с учетом поперечного поля, возбужденного самим же сгустком, пролетающим через ускоряющую структуру.

Для головной частицы получим, что она движется по орбите, описываемой уравнением

$$x_1(s) = x_0 \cos k_\beta s \ .$$

Тогда уравнение для движения хвостовой частицы запишется

$$x_{12}'' + k_\beta{}^2 \cdot x_2 = C \cos k_\beta s\,, \tag{9.46}$$

где $C = \dfrac{Q}{2} \cdot \dfrac{e \cdot w_d\left(2 \cdot \sigma_z\right) \cdot x_0}{\gamma \cdot mc^2}$, а штрих означает производную по s.

Для постоянной энергии $V_0 = \gamma_0 mc^2$ уравнение движения хвостовой час-

тицы есть уравнение для гармонического осциллятора без потерь, находящегося в резонансе. Полагая $x_2(0) = x_2'(0) = 0$ при $s = 0$, получим

$$x_2 = \frac{C}{2k_\beta}\left[s \cdot \sin\left(k_\beta s\right)\right], \tag{9.47a}$$

$$x_2' = \frac{C}{2k_\beta}\left[\sin k_\beta s + k_\beta s \cdot \cos k_\beta s\right]. \tag{9.47b}$$

Интерес представляют два предела. Для $k_\beta = 0$ мы получим

$$x_2 = Cs^2/2,$$
$$x_2' = Cs. \tag{9.48}$$

Величина ε, пропорциональная поперечному эмиттансу, равна

$$\varepsilon = \pi \cdot x_2 \cdot x_2' = \pi\left(\frac{C^2}{2}\right) \cdot s^3. \tag{9.49}$$

В пределе сильной фокусировки $k_\beta\ s >> 1$:

$$x_2 = \left(\frac{C\,s}{2k_\beta}\right) \cdot \sin\left(k_\beta s\right),$$

$$x_2' = \left(\frac{C\,s}{2}\right) \cdot \cos\left(k_\beta s\right),$$

$$\varepsilon \equiv \pi \cdot |x_l| \cdot |x_l'| = \pi \cdot \left(\frac{C^2}{4k_\beta}\right) \cdot z^2. \tag{9.50}$$

То есть отношение максимального перемещения при сильной фокусировке к перемещению без фокусировки есть

$$\frac{|\,x_l\,|\ \ focusing}{|\,x_l\,|\ \ no\ focusing} = \frac{1}{k_\beta s} = \frac{1}{2\pi N_\beta}, \tag{9.51}$$

где $N_\beta = s/\lambda_\beta$ - число бетатронных колебаний.

Соответствующее отношение эмиттансов есть $1/(4\pi N_\beta)$. Отметим, что движение хвостовой частицы отлично от головной на 90° по фазе. В фазовом виде (9.47a) выглядит как

$$\tilde{x}_2(s) = \tilde{x}_2(0) j\, A\, \tilde{x}_0, \tag{9.52}$$

где $$A = \frac{C\,s}{2k_\beta x_0} = \frac{qs\ W_t(2\sigma_z)}{4V_0 k_\beta}. \tag{9.53}$$

Пример: линейный коллайдер SLAC имеет следующие параметры:

длина SLAC-ускорителя	$z = 3\cdot10^3$ м,
конечная энергия пучка	$U = 50$ ГэВ,
длина волны поперечных колебаний	$\lambda_\beta = 100$ м,
число частиц в сгустке	$N_e = 5\times10^{10}$,
заряд сгустка	$q = 8\cdot10^{-9}$ К,
длина сгустка	$\sigma_z = 1$ мм ($\sigma_t = \sigma_z / c = 3{,}3$ пс),
длина периода SLAC-структуры	$d = 35$ мм,
радиус отверстия диска	$a = 16{,}3$ мм,

Из рис. 9.5 при известном размере отверстия диска a поперечное возбуждение при $2\cdot\sigma_t = 6{,}6$ пс есть $1{,}0\cdot10^{14}$ В/К/м/период. Так как длина периода $d = 3{,}5\cdot10^{-2}$ м, то возбуждение $W_t(2\sigma_z) = 2{,}8\cdot10^{15}$ В/К/м^2. Аппроксимируем полную энергию ускорения 50 ГэВ на среднюю постоянную энергию 25 ГэВ. Подставив эти значения в (9.53), получим A=10 или $\left| x_2(z) \right| = 10\cdot\left| x_2(0) \right|$ для амплитуды колебаний хвоста заряда, который движется за головой заряда.

Если имеется разброс по энергиям внутри сгустка, то также будет разброс в бетатронных частотах ($k_\beta^2 \approx 1/\gamma$) для данной фокусирующей системы. В модели двух частиц это означает, что головная частица с частотой $k_{\beta 0}$ ведет хвостовую частицу с частотой $k_{\beta 2} = k_{\beta 0} + \delta k$. Хвост частицы будет теперь нерезонансным осциллятором, и мы будем наблюдать уменьшение осцилляций по сравнению с тем, что дает (9.50). Это по существу затухание Ландау. Уравнение движения для этого случая и его решение, в предположении $x_2 = x_2' = 0$ при $s = 0$, есть

$$x_2'' + k_{\beta 2}^2 x_2 = C\cos\left(k_{\beta 0} s\right),$$

$$x_2 = \frac{C}{k_{\beta 2}^2 - k_{\beta 0}^2}\left(\cos k_{\beta 0} s - \cos k_{\beta 2} s\right) =$$

$$= \frac{2C}{k_{\beta 2}^2 - k_{\beta 0}^2}\left\{\left[\sin\frac{1}{2}\left(k_{\beta 2} + k_{\beta 0}\right)s\right]\cdot\left[\sin\frac{1}{2}\left(k_{\beta 2} - k_{\beta 0}\right)s\right]\right\},$$

$$x_2' = \frac{C}{k_{\beta 2}^2 - k_{\beta 0}^2}\left(k_{\beta 2}\sin k_{\beta 2} s - k_{\beta 0}\sin k_{\beta 0} s\right). \qquad (9.54)$$

Максимум амплитуды x и x' в предположении малости $\delta k / k_\beta$ будет

$$|x_2| = \frac{C}{k_\beta \, \delta k} \ ,$$

$$|x_2'| = \frac{C}{\delta k} \ ,$$

$$\varepsilon = \pi \frac{C^2}{k_\beta (\delta k)^2} \ . \qquad (9.55)$$

Сравнивая (9.55) с (9.50), заметим, что уменьшение амплитуды $|x_2|$, обусловленное различием частот поперечных колебаний у “головы” и “хвоста”, равно

$$\frac{|x_2|(\delta k \neq 0)}{|x_2|(\delta k = 0)} = \frac{2}{s \cdot \delta k} \ . \qquad (9.56)$$

Эмиттанс же уменьшается как корень квадратный от этой величины.

Для уменьшения поперечного эмиттанса таким способом необходимо, чтобы головные частицы сгустка имели большую энергию, чем средние, а хвостовые частицы сгустка – меньшую. Связано это с тем, что сила, действующая на хвостовые частицы при колебании сгустка как целого, направлена по их смещению и должна компенсироваться фокусирующим действием квадрупольных линз. Таким образом, эффект поперечной неустойчивости может быть подавлен выбором правильной фокусирующей силы и энергетического спектра сгустка.

Оглавление

Стр.

Глава 1. ПРОДОЛЬНАЯ ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В ЛИНЕЙНЫХ УСКОРИТЕЛЯХ 3
Малые фазовые колебания 7
Продольное движение в поле волны с $\beta_ф = 1$ 9
Глава 2. ГРУППИРОВАТЕЛИ 14
Чопперы 14
ВЧ-пушки 15
Пушка с СВЧ-отсечкой тока 15
СВЧ-пушка 16
СВЧ-фотопушка 16
Клистронные группирователи 17
Волноводные группирователи 21
Глава 3. НЕСИНХРОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ 25
Глава 4. ПОПЕРЕЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ 31
Глава 5. УЧЕТ СИЛ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА 35
Влияние пространственного заряда на продольное движение 37
Глава 6. ФОКУСИРОВКА СОЛЕНОИДАЛЬНЫМ ПРОДОЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ 41
Глава 7. КВАДРУПОЛЬНАЯ ФОКУСИРОВКА 46
Квадрупольные линзы 47
Уравнения Матье-Хилла 50
Пучок частиц в жесткофокусирующем канале 58
Матричный метод расчета функций Флоке 68
Глава 8. ФОКУСИРОВКА ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ПОЛЕМ 82
Высокочастотные квадрупольные линзы 82
Фазопеременная фокусировка (ФПФ) 85
Глава 9. ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ, ИМПЕДАНСЫ И ПОТЕНЦИАЛЫ ИЗЛУЧЕНИЯ 90
Продольные поля излучения 93
Поперечные поля излучения 99
Поперечная динамика пучка, двухчастичная модель 103